LABORATOIRE DE PHYSIOL SORBON

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 dicembre 1903.

P. VILLARI, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisiologia. — *I centri respiratori spinali e le respirazioni che precedono la morte.* Nota del Socio ANGELO MOSSO.

Le esperienze di Rokitansky e quelle fatte in seguito da O. Langendorff [1] e da Wertheimer [2] avevano fatto ammettere l'esistenza dei centri respiratori spinali. Questa dottrina venne combattuta e sottomessa ad una critica sperimentale da valenti fisiologi, e l'opinione ora dominante è che il midollo spinale separato dal midollo allungato, non possa dare effettivamente impulso a dei movimenti respiratori regolari. Tra i molti lavori che dovrei citare ne ricorderò solo uno del Gad [3].

Sono esperienze difficili, perchè dovendo tagliare trasversalmente tutto il midollo, poco sopra il primo nervo cervicale, si produce uno *shock* proprio nella parte contigua del midollo spinale dove stanno le cellule nervose che devono dopo funzionare. I risultati negativi non hanno quindi alcun valore: nè giova per eliminare questo *shock* di ricorrere all'applicazione della cocaina sul midollo allungato, perchè anche questa si diffonde rapidamente ai centri respiratori spinali. Infatti, noi vedremo che dopo il taglio completo del midollo

(1) O. Langendorff, *Studien über die Innervation der Athembewegungen.* Arch. f. Physiologie, 1880, pag. 519.

(2) E. Wertheimer, *Centres respiratoires de la moelle épinière.* Journal de l'Anatomie et de la Physiologie. Paris, 1886, pag. 458.

(3) Gad, *Ueber Athmungscentrum in der Medulla oblongata.* Arch. f. Physiologie, 1893, pag. 178.

sopra il primo nervo cervicale, persistono i movimenti respiratori, mentre essi mancano dopo l'applicazione della cocaina sul midollo allungato.

Il metodo della sezione trasversale è la prova decisiva: e non occorre per vedere i movimenti respiratori spinali di ricorrere all'avvelenamento colla stricnina. Io mi sono servito di gatti giovani, che credo siano da preferirsi agli altri animali, ed ottenni dei tracciati migliori che non quelli di Langendorff sui conigli e di Wertheimer sui cani. Due cose sono indispensabili per riuscire in queste esperienze. La prima è di tenere gli animali caldi; mi servivo a tale scopo di una vaschetta profonda 10 centim. e larga 50 centim. per lato, piena fino a metà di acqua a 37°. Il gatto restava immerso senza

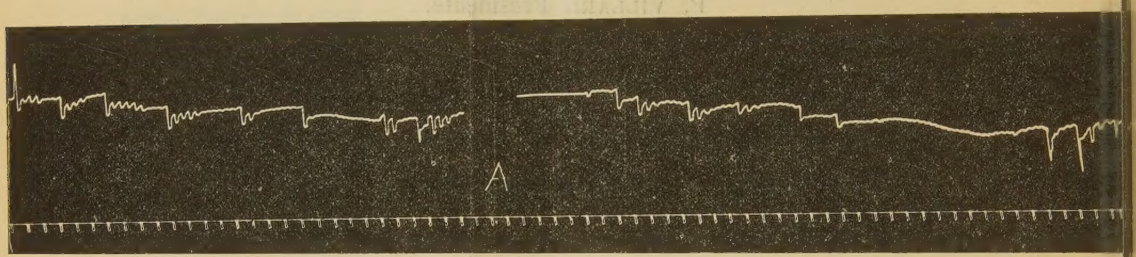


Fig. 1.

che l'acqua passasse sopra l'addome e teneva la testa fuori dell'acqua. L'altra è di continuare la respirazione artificiale, fino a che siano cessati gli effetti dello *shock*. Se l'emorragia per la sezione del midollo non fu grave, gli animali si mettono a respirare dopo circa mezz'ora, o poco più.

Riferisco un' esperienza che feci insieme al dott. A. Herlitzka in un gatto di tre mesi, del peso di 750 gr. Dopo averlo cloroformizzato, quando è cessata la sensibilità, viene fatta la tracheotomia e poi si scopre il midollo allungato, che si taglia trasversalmente con un bisturi bene affilato, immediatamente sopra il primo nervo cervicale. Incominciata subito la respirazione artificiale si immerge il gatto nella bacinella d'acqua a 37°. Durante la prima mezz'ora, non si osserva alcun movimento nei muscoli della respirazione. Cessata la respirazione artificiale il gatto sta circa un minuto e mezzo completamente immobile, e dopo incomincia a fare dei movimenti colla faccia; anche la coda si muove e con essa le estremità posteriori; ma non si osserva alcun movimento del torace, o del diaframma, nettamente respiratorio. Solo in ultimo comparisce una modificazione della tonicità nel diaframma come quella che ho descritta in una Nota precedente (1).

Per scrivere i movimenti del respiro che sono molto deboli, conviene mettere la cannula tracheale in comunicazione con un timpano a leva di Marey.

(1) R. Accademia di Medicina di Torino, Novembre 1903.

Dopo 40 minuti che si faceva la respirazione artificiale, ottenemmo il tracciato riprodotto nella fig. 1.

Il tempo è segnato sotto ogni due minuti secondi. Il gatto fa 6 o 7 respirazioni, seguite ciascuna da altre 4 o 5 più deboli; il cuore batte bene, come si vede nel tracciato stesso: in *A* si ferma il cilindro e per 15 secondi facciamo la respirazione artificiale. Dopo una breve pausa vi sono 5 o 6 respirazioni come le precedenti e quindi succede una pausa, dopo la quale ricominciano altre respirazioni spontanee senza che si produca contemporaneamente alcun moto delle estremità.

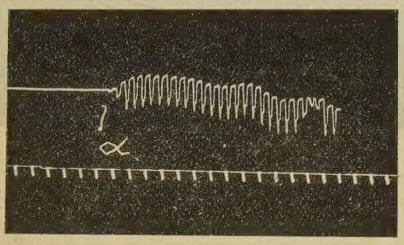


Fig. 2.

Da questo tracciato e da altri che non riproduco, si vede che dopo il taglio del midollo allungato, la respirazione quando si ristabilisce, ha una forma periodica con delle fasi di riposo e di attività respiratoria.

Ripetendo parecchie volte questa esperienza, mi accorgo che i centri spinali si esauriscono rapidamente, e cessa il respiro con una scala decrescente di moti respiratori fino a che si ferma. Riprendendo la respirazione artificiale, migliorano le condizioni dei centri e si ristabilisce più forte la respirazione spontanea (fig. 2).

Dopo 50 minuti dal momento che si è fatto il taglio del midollo, il respiro funziona bene e spontaneo come si vede nella figura 2. Non occorre l'asfissia, perchè i centri si mettano in azione; nel segno α cessa la respirazione artificiale e subito vediamo che il respiro funziona. L'eccitabilità del midollo era bene conservata e il riflesso rotuleo compievasi con facilità che sembravaci quasi esagerata.

Prima che cominciasse l'esperienza il gatto faceva 50 respirazioni al minuto, ora vediamo che ne fa 60, e nel tracciato successivo la frequenza del respiro aumentò così poco che possiamo considerarla come normale. Questa osservazione ci mostra che senza l'azione del vago e i riflessi ai quali da molti viene data così grande importanza nella regolazione del respiro, le cellule del midollo spinale mantengono da sole il ritmo normale.

Dopo un' ora dal momento che venne fatta la sezione del midollo, si sospende la respirazione artificiale, e si innesta subito il tubo nella cannula della trachea per mettere i polmoni in communicazione col timpano registratore. Non vi è apnea, comincia subito il respiro e la sua frequenza presenta delle leggere variazioni come si vede nel tracciato 3.

Dopo 26 secondi si manifestano delle respirazioni più profonde, alle quali seguono 7 ad 8 respirazioni superficiali. È lo stesso fenomeno che erasi veduto nella figura 1, solo che adesso la forza dei moti respiratori è maggiore.

Questa curva è identica a quella che osservai molte volte negli animali che muoiono per asfissia col midollo allungato illeso. Essa rassomiglia al tracciato di una scimmia intatta che pubblicai nella precedente Nota, e a quella di un cane che riprodurrò colla fig. 6 nelle pagine seguenti. Quindi

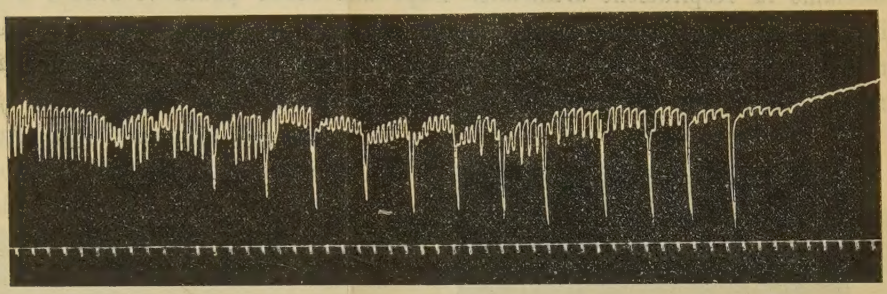


Fig. 3.

succedono a breve distanza due periodi di respirazioni più forti come quelli della fig. 4.

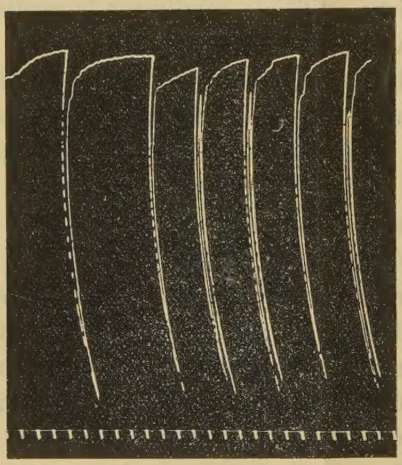


Fig. 4.

L'animale si agita e spostasi nella bacinella muovendo fortemente le zampe. Si scrive un ultimo pezzo di tracciato della respirazione che non riproduco perchè simile alla fig. 4, dove le respirazioni sono più forti e lente: e quindi si lascia morire l'animale.

Fatta l'autopsia si riscontra che il taglio del midollo fu completo immediatamente sopra il primo paio dei nervi cervicali.

L'uguaglianza del ritmo, la respirazione a periodi, e l'identica forma dei tracciati con quelli che si osservano nell'asfissia quando il midollo allungato è intatto, non possono lasciare dubbio che qui si tratti di veri movimenti respiratori. Ripeto che si scrissero mentre l'animale era completamente immobile.

Da queste osservazioni risulta un fatto importante ed è, che le cellule nervose del midollo spinale, le quali governano i moti del respiro, sono per la funzione loro fisiologica identiche a quelle del midollo allungato e reagiscono in modo corrispondente all'asfissia con dei periodi di maggiore e

minore attività. Possiamo quindi accettare l'idea di Foster (1), il quale considera il sistema nervoso respiratorio simile al sistema vasomotore che ha un centro nel midollo allungato e dei centri secondarî nel midollo spinale, i quali coadiuvano e in casi speciali possono supplire il midollo allungato.

Per ispiegare la natura dei centri respiratori spinali, penso non sia inutile ricordare la divisione del corpo in metameri, e che qui nello studio della respirazione ricompare un accenno della segmentazione fisiologica. I neuroni dei centri spinali conservano la loro funzione respiratoria, e tengono sotto il loro dominio i muscoli del respiro, anche quando cessa le comunicazione loro col midollo allungato.

Possiamo quindi considerare il midollo spinale come fatto di segmenti: le cellule motrici che stanno nel midollo allungato sono esse che hanno la prevalenza e forse per mezzo di una specificazione maggiore riescono meglio a dare impulso ai neuroni sottostanti, ma questi possono in determinate circostanze funzionare anche da soli. Se la loro azione non è completa ed efficace, vedemmo però come sia armonica e simile a quella del midollo allungato: onde dobbiamo ammettere l'esistenza (tanto contrastata) dei centri respiratori spinali.

§ 2°. — *Le respirazioni finali che precedono la morte.*

Langendorff (2) studiando le ultime respirazioni nell'asfissia, conchiuse che esse corrispondono al fenomeno di Cheyne Stokes raccorciato. E Landergren ritenendo che alcune forme della respirazione di Cheyne Stokes debbano considerarsi come fenomeni dipendenti dalla inibizione, affermò egli pure che i mutamenti del respiro nell'asfissia debbano considerarsi come un fenomeno di Cheyne Stokes raccorciato (3).

Avendo studiato con predilezione i fenomeni della respirazione periodica, ho voluto raffrontarla meglio colle respirazioni finali che precedono la morte. La mancanza di eccitabilità del midollo allungato, è un primo fatto che mostra una differenza profonda tra la pausa del respiro che si produce nell'asfissia prima delle respirazioni finali e quella che osservasi nella respirazione Cheyne Stokes.

Molte persone, specialmente nell'aria rarefatta hanno la respirazione periodica, senza che cessi per questo la coscienza nelle pause; in altre il sonno durante la pausa è così superficiale, che ad ogni piccola eccitazione cessa la pausa e comincia la respirazione regolare, oppure succede subito un

(1) M. Foster, *A Text Book of Physiology*, parte II, 586.

(2) O. Langendorff, *Mittheilungen zur Athmungslehre*. Archiv. f. Physiologie, 1893, pag. 397.

(3) E. Landergren, *Ueber die Erstickungserscheinungen*, Skandinav. Archiv. für Physiologie, VII, B. 1897, pag. 1.

periodo di attività respiratoria col tipo Cheyne Stokes (1). Queste cose che osservaronsi nell'uomo, possono riprodursi facilmente nei cani avvelenati colla morfina.

Ottenuta in questo modo la respirazione periodica con delle pause, è facile convincersi che basta un suono, una puntura, od un'eccitazione qualsiasi, per interrompere la pausa che succede dopo un gruppo di respirazioni nel fenomeno Cheyne Stokes. Altre volte il sonno durante la pausa diviene così profondo che questa non può interrompersi: e non si può destare una serie di respirazioni spontanee, neppure eccitando direttamente il midollo allungato con delle correnti elettriche: ma il midollo è ancora eccitabile e invece non lo è più nella pausa prodotta dall'asfissia.

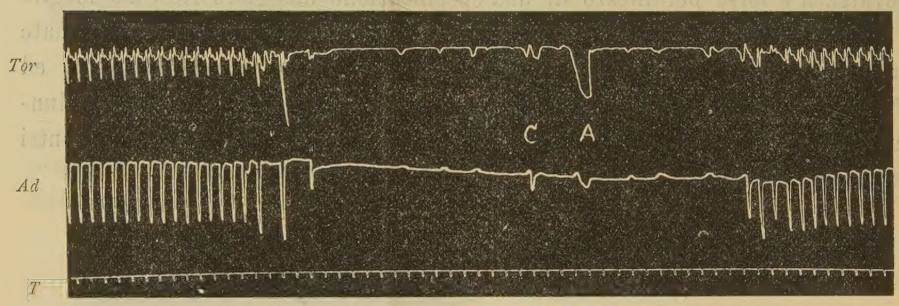


Fig. 5.

Riferisco una di queste esperienze che credo importante anche per altri riguardi (fig. 5). Il tracciato fu ridotto di un terzo.

Ad un cane del peso di 5550 gr. si inietta in due volte 1 gr. di cloralio nella vena giugulare per addormentarlo; fatta la tracheotomia si scopre il midollo allungato. Il cane ha la respirazione periodica e riferiremo colla figura 9 un altro pezzo del medesimo tracciato, che fu scritto con due pneumografi uno dei quali registra i movimenti del torace, linea *Tor* e l'altro quelli dell'addome linea *Ad*. Il tempo è segnato in T ogni 2 secondi. Le linee scendono nella inspirazione e si alzano nella espirazione. Qui vediamo una pausa che dura più di un minuto, dopo la quale il cane fa venti respirazioni e questo succede periodicamente in modo regolare. Nel principio, come vedremo nel tracciato 9, le pause erano solo di mezzo minuto.

L'eccitazione viene fatta con un rocchetto a slitta della fabbrica Hasler di Berna graduato dal prof. Kronecker, che funziona con tre elememti Leclanché. Nel punto segnato C si fa la chiusura ed in A l'apertura di una corrente indotta che si sente bene sulla lingua, la distanza dei rocchetti era

(1) A. Mosso, *La respirazione periodica*. Memorie R. Accademia dei Lincei, Serie 4ª, vol. I, 1884-85.

12 cent. = 3000 unità. Si vede che alla chiusura ed all'apertura della corrente indotta corrispondono due movimenti inspiratori, ma non incomincia il periodo respiratorio che dopo 20 secondi.

La pausa di un minuto che osserviamo prodursi spontaneamente in questo cane, senza che quando riprende il respiro si modifichi la profondità e la frequenza delle respirazioni, è un fenomeno che esaminerò meglio fra poco; intanto basterebbe questa semplice osservazione per dimostrare che i periodi si compiono in modo autoctono, e senza una dipendenza evidente coi gas del sangue. Si crede dopo le ricerche di Winterstein che l'anidride carbonica agisca paralizzando i processi di assimilazione: qui vediamo che una

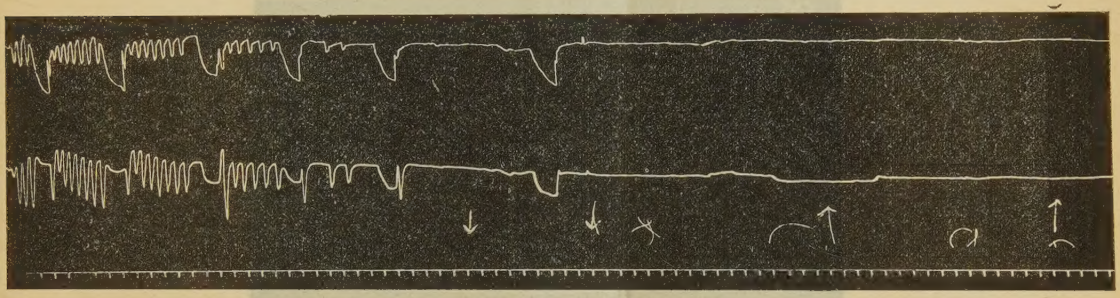


Fig. 6.

pausa la quale durò oltre un minuto lasciò inalterate le condizioni vitali dei centri respiratori.

In questo medesimo cane produciamo l'asfissia chiudendo la trachea: dopo due minuti e mezzo che fu chiusa, incomincia il tracciato fig. 6. Si vede che in esso il tipo respiratorio è simile a quello della respirazione spinale nella fig. 3. Nella prima freccia facciamo un'eccitazione di apertura e chiusura colla medesima corrente = 3000: Distanza dei rocchetti 12 cent., il midollo non è più eccitabile.

Rinforzo l'eccitamento, avvicinando i rocchetti a 10 cent. = 6750 e si ottiene una debole scossa, nel segno della freccia 2. Porto l'eccitamento a 9 cent. di distanza = 7750 e non vedesi alcun effetto nel segno della freccia 3. Mi assicuro che la chiusura e l'apertura della corrente sono tanto forti che possono appena resistersi sulla lingua: nella quarta freccia torno a ripetere l'eccitamento e non vi è alcun effetto. Faccio la respirazione artificiale e poco dopo l'animale ricomincia a respirare spontaneamente. Onde si deve conchiudere che nella pausa del respiro prodotta dall'asfissia, il midollo allungato perde la sua eccitabilità per gli eccitamenti elettrici forti applicati direttamente sul midollo.

Ho scoperto il midollo allungato ad altri animali, come conigli e gatti, e in tutti ho trovato che l'asfissia abolisce l'eccitabilità del midollo allungato, o che almeno non si riesce più durante la pausa ad ottenere degli effetti eccitando il midollo allungato colla stessa intensità degli eccitamenti che prima davano un effetto visibile.

Che cessi l'eccitabilità del midollo allungato nell'asfissia non è una cosa che debba meravigliarci. Winterstein (1) vide nelle rane che il centro respiratorio è il primo ad essere paralizzato quando si mette una rana in una atmosfera di anidride carbonica. Egli dice che questo sta in contrasto con

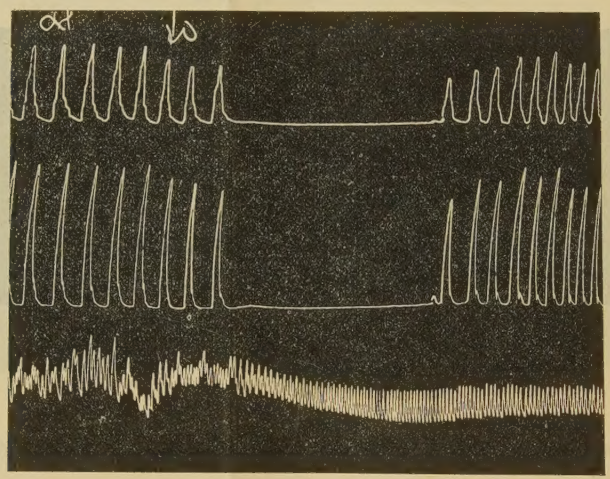


Fig. 7.

quanto osservasi negli animali a sangue caldo, ed è vero che possono cessare i riflessi, senza che sia ancora cessato il respiro. Tale è la regola: ma i centri respiratori nel midollo allungato sono tanto vulnerabili, che possiamo paralizzarli, prima che siano cessati i riflessi nel midollo, e per lo studio che ora ci occupa è importante vedere che le cellule nervose dei centri respiratori spinali sono più resistenti alle azioni paralizzanti che non siano quelle del midollo allungato.

La fig. 7 rappresenta l'esperienza fatta sopra un cane al quale si inietta un grammo di cloralio nella vena giugulare da α in ω. La linea superiore fu scritta con un timpano applicato sul torace messo in comunicazione con un timpano registratore, e la linea sottostante rappresenta la respirazione

(1) H. Winterstein, *Ueber die Wirkung der Kohlensäure auf das Centralnervensystem.* Arch. f. Physiologie 1900. Supplement Band. p. 182.

addominale scritta nello stesso modo. La linea *Pr.* è la pressione del sangue nella carotide scritta con uno sfigmoscopio.

Per mezzo del cloralio iniettato nella vena giugulare si può fermare il respiro come si vede nella fig. 8. Nei centri vicini del midollo allungato che innervano il cuore ed i vasi sanguigni, non comparisce durante questa paralisi del midollo allungato alcun mutamento visibile.

La fig. 8 rappresenta nella linea superiore la respirazione toracica e nella inferiore l'addominale scritte col solito mezzo dei pneumografi doppi messi intorno al torace e all'addome. È un cane del peso di 4500 gr. al quale si iniettò prima gr. 0,25 di cloralio nella vena giugulare per vedere se ot-

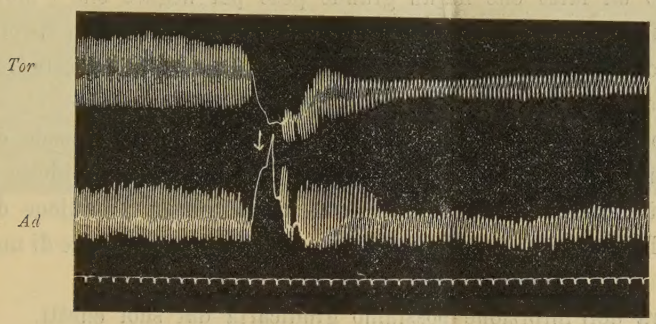


Fig. 8.

tenevasi lo stesso effetto della figura precedente: esssendosi arrestato il respiro, comprimiamo subito con una tanaglia le dita di una delle estremità posteriori, e vediamo che durante la pausa il cane sente e reagisce. Ritornata la respirazione tranquilla, dopo circa 2 minuti ripetiamo l'esperienza e questa si vede nel tracciato 8, il quale fu ridotto di un terzo: il tempo è segnato ogni 2 secondi. Appena si fa l'iniezione di gr. 0,25 di cloralio rapidamente nella vena giugulare cessa il respiro. Nel punto segnato da una freccia si comprimono le dita nelle estremità posteriori, il cane reagisce con un moto delle estremità che vedesi nel tracciato addominale e poco dopo fa 5 respirazioni, succede una pausa di quasi due secondi e dopo l'animale ricomincia a respirare, mentre però rimane diminuita la forza delle respirazioni toraciche, ed è pure minore la tonicità dei muscoli toracici.

La scomparsa dei movimenti riflessi e dei movimenti convulsivi, è uno studio che può aiutarci per stabilire l'ordine col quale vanno successivamente arrestandosi nella loro funzione fisiologica i centri nervosi durante l'asfissia. I primi a cessare sono i movimenti riflessi: Richet (1) mostrò nei conigli

(1) Ch. Richet, *Physiologie des muscles et des nerfs.* Paris, 1882, pag. 715.

che i movimenti riflessi delle palpebre cessano dopo soli quattro secondi di anemia dei centri nervosi.

Dopo 20 secondi che fu chiusa la trachea, i porcellini cadono senza coscienza con un rilasciamento completo dei muscoli. Da questo momento si possono considerare come cessati i riflessi; ed i moti che si osservano nell'animale sono dovuti all'azione diretta che esercita la mancanza dell'ossigeno, o l'accumularsi dell'anidride carbonica, sulle cellule nervose. Una cosa importante è che le convulsioni cessano coll'inizio della pausa respiratoria. Cessate le convulsioni possiamo considerare come messa fuori di combattimento la corteccia cerebrale e il midollo allungato per quanto si riferisce ai movimenti respiratorî. La mancanza dei riflessi quando persiste ancora il respiro è a parer mio un fatto che ha un grande peso per negare che i movimenti respiratorî siano di natura riflessa come credono ancora molti fisiologi. Se essi sussistono quando sono cessate le altre azioni riflesse, questo prova la natura autoctona di tali movimenti.

Come ho già mostrato nella Nota precedente, quanto succede dopo la pausa, è dovuto agli eccitamenti del respiro, che partono dal midollo spinale il quale è più resistente. Per questo non credo giusta l'opinione di Langendorff e di Landergren, i quali ammettono un'azione arrestatrice di un centro inibitore che funziona nella pausa.

La natura dell'inibizione possiamo giudicarla dai suoi effetti.

Gaskell (1) disse che l'inibizione del vago è per sua natura costruttiva, ma noi vediamo scrivendo il respiro che non succede alcun mutamento della forza dopo una pausa la quale duri anche più di un minuto. La figura 9 è un pezzo di tracciato, scritto dal cane del peso di 5550 grammi che venne riprodotto nella figura 5, anche qui il tracciato fu nella riproduzione ridotto di un terzo. Vediamo con quale regolarità si ripetano i periodi di riposo che variano da mezzo minuto fino ad un minuto, mentre che il numero delle respirazioni oscilla intorno alle venti. Il tempo è segnato ogni due secondi.

La tonicità del diaframma cresce nel principio di ogni periodo di attività respiratoria e vediamo che la base delle espirazioni che trovasi volta verso l'alto si abbassa, e dopo lentamente il diaframma si rilascia e l'addome prende una posizione espiratoria maggiore di quanto si osservò in principio di ogni periodo. Malgrado tali pause non cambia la forza delle inspirazioni che si mantiene eguale in ciascun periodo. La linea del torace decorre uniforme e segue passivamente i moti del diaframma.

Questi periodi che si svolgono regolarmente per oltre mezz'ora, provano insieme al tracciato 5 che i moti del respiro sono automatici, perchè se fossero movimenti riflessi dipendenti dalla composizione del sangue non potrebbe

(1) Gaskell, *The inhibitory actions and the inhibitory nerves in general.* International Medical Congress. Copenhagen 1884.

mantenersi inalterato il ritmo e la forza dei movimenti respiratorî, quando succedono delle interruzioni del respiro che durano più di un minuto.

Non mi fermo su questa osservazione la quale viene a confermare la dottrina che sostenni nel mio lavoro sulla respirazione di lusso, dove mostrai che i movimenti del respiro non stanno in rapporto coi bisogni chimici dell'organismo. Questa dottrina venne dopo confermata dalle ricerche di Marckwald (1) e di altri.

Il tempo che intercede fra il principio della pausa e le respirazioni finali è più o meno lungo nelle differenti specie di animali: nel cane supera qualche volta i due minuti. Quanto più questo tempo è lungo e quanto

Fig. 9.

maggiore fu il numero delle volte che si è ripetuta l'asfissia, tanto meno diviene facile il ristabilirsi della funzione del respiro nel midollo allungato dopo che si compirono le respirazioni finali. Non riferisco per brevità alcun tracciato, perchè si tratta di esperienze negative; dirò solo che spesso ho ripreso la respirazione artificiale appena comparvero le prime respirazioni finali, che l'animale fece ancora quattro o cinque respirazioni spontanee, e ciò malgrado continuando per lungo tempo la respirazione artificiale non fu possibile di mantenere il cuore in vita e di vedere quindi ristabilirsi la respirazione spontanea.

Queste differenze sono note ai medici perchè non tutte le persone che muoiono boccheggiano e gli estremi aneliti presentano delle differenze considerevoli. La pausa del respiro se osservasi nel maggior numero dei casi prima che gli agonizzanti boccheggino, può anche mancare. Ho dato un esempio nella precedente Nota col tracciato della scimmia, dove si vede come può cessare il respiro negli animali estremamente deboli.

Anche negli animali sani che vengono uccisi per emorragia, od in altri modi, si osservano delle differenze individuali profonde. Talora comparisce la pausa colle respirazioni finali: altre volte mancano queste due ultime fasi,

(1) Marckwald, *Die Athembewegungen und deren Innervation beim Kaninchen,* in Zeitschrift f. Biologie 1886, vol. XXIII, s. 135.

o non sono bene distinte. Nella morte per emorragia quando si aprono le carotidi, l'azione eccitante dell'anemia va crescendo e rinforza i moti respiratorî, così che le ultime respirazioni sebbene distanti l'una dall'altra sono le più forti; poi si arresta il respiro, comparisce tanto nel torace quanto nel diaframma la reazione caratteristica della tonicità e poi tutto ritorna nel riposo e il cuore si arresta senza che il midollo spinale abbia dato impulso alle respirazioni finali.

Come succede nella morte per gli anestetici, dove talora cessa di funzionare prima il respiro ed altre volte cessa contemporaneamente, o prima, il cuore, così abbiamo in tutti i generi di morte delle differenze individuali nel modo di comportarsi della respirazione che dipendono dallo stato del midollo spinale e del cuore. Quando manca la pausa, i movimenti del respiro nell'asfissia diventano più forti, poco per volta si rallentano, e si indeboliscono fino a che cessano completamente.

Matematica. — *Sull'inversione degl'integrali definiti.* Nota II del dott. Pietro Burgatti, presentata dal Socio V. Cerruti (1).

5. Seguitando la trattazione del problema enunciato nella Nota precedente *Sull'inversione degli integrali definiti*, io prendo a considerare un caso più generale.

Abbiasi da determinare una $f(x)$, finita e continua in o, α_1, in guisa che sia soddisfatta l'equazione

$$\varphi(y) = \int_0^y \{f'(x) + \psi(x, y) f(x)\} dx ; \tag{7}$$

in cui $\varphi(y)$, $\varphi'(y)$, $\psi(x, y)$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \psi_2(x, y)$ sono finite e continue nell'intervallo considerato, e

$$H(x) = e^{\int_0^x \psi(\xi, x)\, d\xi}$$

finita e diversa da zero nello stesso intervallo. Qui dobbiamo supporre $\varphi(0) = 0$, altrimenti la soluzione richiesta non esiste.

Ciò posto, la funzione ausiliaria $F(x, y)$ deve soddisfare l'equazione

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \psi(x, y) F(x, y) = \varphi'(x) ;$$

(1) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1903.

avremo quindi

$$F(x, y) = \frac{1}{K(x, y)} \left\{ \int \varphi'(x)\, K(x, y)\, dx + Y(y) \right\},$$

ove

$$K(x, y) = e^{\int \psi(x, y)\, dx} \quad \text{e} \quad Y = \text{funz. arb.}$$

Seguendo sempre il metodo tenuto nei paragrafi precedenti, noi assumeremo, per così dire, come primo valore approssimato di $f(x)$, la funzione $Z_0(x)$ che si ottiene dalla $F(x, y)$ facendo $y = x$, e che prende il valore a per $x = 0$. Tale funzione è definita dalla formula

$$Z_0(x) = \frac{1}{H(x)} \left\{ \int_0^x \varphi'(x)\, H(x)\, dx + a \right\};$$

onde ponendo

$$f(x) = Z_0(x) + f_1(x),$$

avremo

$$\varphi(y) - \int_0^y (Z_0'(x) + \psi(x, y)\, Z_0(x))\, dx =$$

$$= \varphi_1(y) = \int_0^y \{ f_1'(x) + \psi(x, y)\, f_1(x) \}\, dx .$$

Questa equazione è della forma (7); per conseguenza, ripetendo tutti i ragionamenti già fatti, porremo

$$f_1(x) = Z_1(x) + f_2(x)$$

con

$$Z_1(x) = \frac{1}{H(x)} \int_0^x \varphi_1'(x)\, H(x)\, dx ;$$

espressione questa che si annulla per $x = 0$. Per calcolare $\varphi_1'(x)$, formiamoci anzitutto l'equazione differenziale del primo ordine a cui soddisfa $Z_0(x)$. Si ottiene subito

$$Z_0'(x) = \varphi'(x) - \frac{H'(x)}{H^2(x)} \left\{ \int_0^x \varphi'(x)\, H(x)\, dx + a \right\},$$

e quindi

$$Z_0'(x) + \frac{H'(x)}{H(x)} Z_0(x) = \varphi'(x),$$

ossia

$$(e) \qquad Z_0'(x) + \left\{ \int_0^x \psi_2(\xi, x)\, d\xi + \psi(x, x) \right\} Z_0(x) = \varphi'(x).$$

Ciò fatto, dall'espressione di $\varphi_1(y)$ si trae

$$\varphi_1'(x) = \varphi'(x) - (Z_0'(x) + \psi(x\,,\,x)\,Z_0(x)) - \int_0^x \psi_2(\xi\,,\,x)\,Z_0(\xi)\,d\xi\,;$$

quindi, in virtù della (e),

$$\varphi_1'(x) = \int_0^x [Z_0(x) - Z_0(\xi)]\,\psi_2(\xi\,,\,x)\,d\xi\,.$$

Risulta dunque

$$Z_1(x) = \frac{1}{H(x)} \int_0^x H(\eta)\,d\eta \int_0^\eta [Z_0(\eta) - Z_0(\xi)]\,\psi_2(\xi\,,\,\eta)\,d\xi\,.$$

Ripetendo ora il ragionamento quante volte si voglia, si trova

$$f(x) = Z_0(x) + Z_1(x) + \cdots\cdots + Z_n(x) + f_{n+1}(x),$$

ove Z_0 ha l'espressione trovata,

$$Z_n(x) = \frac{1}{H(x)} \int_0^x H(\eta)\,d\eta \int_0^\eta [Z_{n-1}(\eta) - Z_{n-1}(\xi)]\,\psi_2(\xi\,,\,\eta)\,d\xi\,,\ (n = 1\,,2\,,3\,...)$$

e la $f_{n+1}(x)$ soddisfa un'equazione come la (7). Orbene, la serie

$$Z_0 + Z_1 + \cdots\cdots + Z_n + \cdots\cdots$$

è convergente in ugual grado nell'intervallo $|0\,,\,\alpha|$, e rappresenta la $f(x)$ che soddisfa alla (7) e che assume il valore a per $x = 0$. Infatti, essendo $Z_0(x)$ finita e continua in $|0\,,\,\alpha|$, indicheremo con L il limite superiore dei suoi valori assoluti; con M e m rispettivamente il limite superiore e l'inferiore dei valori di $|H(x)|$, e con L_1 il limite superiore di quelli di $|\psi_2(x\,,y)|$ per x e y variabili nell'intervallo considerato. Allora risulta

$$|Z_1(x)| < 2\,LL_1\,\frac{M}{m}\,\frac{|x|^2}{2}$$

$$|Z_2(x)| < 2\,L \cdot \left(\frac{L_1\,M}{m}\right)^2 \frac{|x|^4}{2\cdot 4} + 2L \cdot \left(\frac{L_1\,M}{m}\right)^2 \frac{|x|^4}{|\underline{4}} < L \cdot \left(\frac{L_1\,M}{m}\right)^2 \frac{|x^2|^2}{1\cdot 2}\,,$$

e così via; quindi in generale

$$|Z_n(x)| < L\left(\frac{L_1\,M}{m}\right)^n \frac{|x^2|^n}{|\underline{n}}\,,$$

il che dimostra la convergenza in ugual grado della serie.

È poi chiaro che per $x = 0$ assume il valore a, perchè tutte le Z_s si annullano per tal valore di x, ad eccezione di Z_0 che diventa uguale ad a. Dunque la serie trovata rappresenta una funzione finita e continua in $|0, \alpha|$, che assume per $x = 0$ un valore dato ad arbitrio. Essa soddisfa l'equazione (7), come risulta chiaramente dal procedimento usato per calcolarla. Ciò, del resto, può verificarsi in modo diretto. Derivando l'equazione proposta rispetto ad y, si ottiene

$$\varphi'(y) - [f'(y) + \psi(y, y) f(y)] = \int_0^y \psi_2(x, y) f(x) dx ;$$

e quindi, per l'espressione di $f(y)$,

$$\varphi'(y) - \sum_0^\infty (Z_n'(y) + \psi(y, y) Z_n(y)) = \sum_0^\infty \int_0^y \psi_2(x, y) Z_n(x) dx .$$

Se ora osserviamo che Z_0 soddisfa alla (e), e che in generale per $n = 1,2,3...$ sussiste l'equazione

$$Z_n'(x) + \left\{ \int_0^x \psi_2(\xi, x) d\xi + \psi(x, x) \right\} Z_n(x) = \varphi_n'(x) ,$$

la precedente diventa:

$$Z_0(y) \int_0^y \psi_2(\xi, y) d\xi -$$

$$- \sum_1^\infty \left[\varphi_n'(y) - Z_n(y) \int_0^y \psi_2(\xi, y) d\xi \right] = \sum_0^\infty \int_0^y \psi_2(\xi, y) Z_n(\xi) d\xi ,$$

ossia

$$- \sum_1^\infty \varphi_n'(y) = \sum_0^\infty \int_0^y (Z_n(\xi) - Z_n(y)) \psi_2(\xi, y) d\xi .$$

Ma questa è un'identità, perchè $\varphi_n'(y)$ è precisamente uguale a

$$\int_0^y [Z_{n-1}(y) - Z_{n-1}(\xi)] \psi_2(\xi, y) d\xi ;$$

dunque resta dimostrato l'asserto.

La soluzione trovata è unica. Supponiamo, infatti, che esista un'altra soluzione $f_1(x)$ della (7), finita e continua in $|0, \alpha|$ ed uguale ad a per $x = 0$. Lu funzione $f(x) - f_1(x) = P(x)$, che si annulla per $x = 0$, dovrebbe soddisfare all'equazione

$$0 = P(y) + \int_0^y \psi(x, y) P(x) dx ;$$

dalla quale si trae

$$(o) \qquad |P(y)| = \int_0^{|y|} |\psi(x, y)| \cdot |P(x)|\, dx .$$

Indicando con L e M rispettivamente i limiti superiori dei valori assoluti di $P(x)$ e $\psi(x, y)$ per x e y variabili in $|0, \alpha|$, si deduce

$$\begin{aligned} |P(y)| &\leq LM|y| \\ |P(y)| &\leq (LM)^2 \frac{|y|^2}{|\underline{2}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |P(y)| &\leq (LM)^n \frac{|y|^n}{|\underline{n}} , \end{aligned}$$

usando successivamente la (o). Si vede dunque che $|P(y)|$ è più piccola di qualunque quantità assegnata piccola a piacere. Se ne conclude che $f(x) - f_1(x)$ è nulla identicamente.

L'equazione (7), che abbiamo risoluta, contiene in sè, come caso particolare, la seguente:

$$(8) \qquad \varphi(y) = f(y) + \int_0^y \psi(x, y)\, f(x)\, dx ,$$

che fu considerata dal prof. Volterra [1]. Infatti, mantenendo le ipotesi fatte sulla $\psi(x, y)$, dovrà essere $f(0) = \varphi(0)$; talchè la precedente si potrà scrivere:

$$\varphi(y) - \varphi(0) = \int_0^y \{f'(x) + \psi(x, y)\, f(x)\}\, dx .$$

Questa equazione è della forma (7) e il primo membro si annulla per $y = 0$; quindi possiamo concludere, che esiste una sola soluzione $f(x)$ della (8), finita e continua in $|0, \alpha|$. Essa si calcola col nostro procedimento, assegnando ad a il valore $\varphi(0)$.

Notiamo ancora che nella funzione ausiliaria $F(x, y)$ comparisce una arbitraria $Y(y)$, della quale si può disporre opportunamente entro certi limiti, onde ottenere per le Z_s delle espressioni più semplici o più utili nelle applicazioni.

Osserviamo infine che l'equazione più generale

$$\varphi(y) = \int_0^y [\psi_0(x, y)\, f'(x) + \psi_1(x, y)\, f(x)]\, dx$$

[1] Rendiconti della R. Acc. Lincei, 1896; Annali di Matematica 1897.

si può ridurre alla forma (7) o (8). Infatti, con una integrazione per parti si ottiene

$$\varphi(y) = \varphi_0(y, y)\, f(y) - \psi_0(x, 0)\, f(0) + \int_0^y \left(\psi_1 - \frac{\partial \psi_0}{\partial x}\right) f(x)\, dx;$$

la quale mostra che deve essere $f(0) = 0$, se $\psi_0(x, 0)$ è una vera funzione di x. In tal caso l'equazione assume la forma (8), cioè

$$\frac{\varphi(y)}{\psi_0(y, y)} = f(y) + \int_0^y \frac{\psi_1 - \frac{\partial \psi_0}{\partial x}}{\psi_0(y, y)} f(x)\, dx,$$

supponendo che sia $\varphi(0) = 0$, $\psi_0(y, y) \neq 0$, e che il coefficiente di $f(x)$ soddisfaccia alle condizioni imposte alla ψ nella (8).

Se $\psi_0(x, 0)$ fosse una costante non nulla, si potrebbe porre

$$\psi_0(y, y)\ f(y) = \mathrm{P}(y);$$

dopo di che l'equazione assumerebbe la forma (7). Ed infine, supponendo $\psi_0(x, 0) = 0$, si ritornerebbe alla forma (8).

Fotografia del cielo. — *Sulla precisione delle posizioni delle stelle ottenute mediante la fotografia.* Nota del prof. G. Boccardi [1], presentata dal Corrispondente A. Riccò.

A tutti è noto che l'applicazione della fotografia celeste alla costruzione di cataloghi stellari ha notevolmente abbreviato il lavoro; ma forse non tutti si fanno ragione del grado di esattezza che si può raggiungere nelle posizioni fotografiche delle stelle, grado che è di gran lunga superiore a quello delle posizioni date dai migliori Cataloghi e poggiate sopra molte osservazioni meridiane.

L'illustre sig. Loewy, in diverse Memorie pubblicate recentemente, ha esaminate e discusse le diverse cause di errore, le quali, sebbene in grado minimo, sussistono nelle posizioni fotografiche delle stelle. La conclusione cui egli è giunto, sia in dette Memorie, sia nella introduzione al I volume del catalogo fotografico di Parigi, è che nell'errore il quale rimane sulle posizioni fotografiche delle stelle entrano:

1°. La inesattezza delle misure delle coordinate rettilinee delle stelle sulla lastra;

2°. La inesattezza proveniente dalla costituzione del sottile strato di gelatina che ricopre la lastra, cioè dal suo non uniforme grado di sensibilità

[1] R. Osservatorio di Catania. Dicembre 1903.

nella estensione dei singoli quadratini del reticolato impresso, e dalle deformazioni che detto strato subisce. Secondo Loewy, l'errore introdotto da questa causa fisica sulle coordinate misurate è poco sensibile fino alla 10ª grandezza; ma per le stelle più piccole della 10ª esso è sensibile e quasi eguale all'errore dipendente dalle misure stesse, e cresce rapidamente al diminuire della grandezza;

3°. Le incertezze che rimangono sulle posizioni in coordinate equatoriali adottate per le stelle di confronto, scelte sulla lastra per determinare le costanti e le correzioni delle misure.

Incaricato finora della riduzione in catalogo stellare delle fotografie celesti eseguite nel R. Osservatorio di Catania dal direttore, prof. Riccò, e dal sig. ingegnere Mascari, ho avuto occasione di occuparmi anch'io del grado di precisione, che si può ottenere nelle posizioni fotografiche stellari.

Per determinare questa precisione ho preferito un metodo pratico, il principio generale del quale consiste in paragonare le divergenze fra le posizioni fotografiche di una stella, date da diversi Osservatorî, alle divergenze fra le posizioni della stella medesima, date anche da diversi Osservatorî, e poggiate sopra osservazioni al circolo meridiano. Nel fare i confronti fra le divergenze fotografiche e le meridiane, non sono ricorso agli errori *medî* o *probabili* dei due generi di misure, perchè, se per le posizioni meridiane era possibile calcolare detti errori secondo il metodo dei minimi quadrati, avendosi molte posizioni meridiane delle medesime stelle, date da diversi Osservatorî, ciò non era possibile per le posizioni fotografiche, poichè raramente la stella medesima è stata fotografata da parecchi Osservatorî, ed anche più raramente furono pubblicati i risultati fotografici. Infatti io non ho potuto istituire il confronto che fra 2 o al più 3 posizioni fotografiche delle medesime stelle. Ho quindi creduto preferibile il calcolare pei due generi di misura *le divergenze dal valore medio* e paragonarle fra loro.

Riguardo alle posizioni meridiane, il sig. Loewy poggiandosi sopra tutte le posizioni meridiane di 21 stella di riferimento di *Eros*, ha calcolato i seguenti errori probabili:

$$\text{per } \alpha \ldots \pm 0'',350\,, \quad \text{per } \delta \ldots \pm 0'',332\,.$$

Ma questo risultato non è generale, variando molto l'errore probabile secondo le stelle, anche di declinazione poco differente. Si vedrà che per 42 stelle di *Eros*, da me adoperate in uno dei saggi fatti, si ha per *divergenza media* di una posizione meridiana, data da un Osservatorio, dalla media di tutte le posizioni date da molti Osservatorî:

$$\text{per } \alpha \ldots \pm 0'',69\,, \quad \text{per } \delta \ldots \pm 0'',36\,.$$

Per un altro gruppo di 18 stelle di *Eros*, trovo:

$$\text{divergenza media: per } \alpha \ldots \pm 0'',84\,, \quad \text{per } \delta \ldots \pm 0'',42\,.$$

Il confronto delle divergenze, relative alle posizioni fotografiche ed alle meridiane, può farsi per ogni stella in particolare, e allora l'influsso della grandezza sparisce, cioè si può avere per ogni grandezza una idea esatta della precisione dei due metodi. Però, avendo io confrontato posizioni di stelle quasi tutte inferiori alla 8ª grandezza e superiori alla 10ª, la media delle divergenze per le diverse stelle può anche dare una idea esatta del grado di precisione che si può raggiungere su stelle così piccole. Siccome poi le posizioni meridiane di ogni stella di *Eros*, date dai diversi Osservatorî, sono poggiate sopra presso a poco lo stesso numero di osservazioni, non ho avuto riguardo alla leggera differenza che potrebbe provenire dalla diversità del numero delle osservazioni.

Riferirò qui soltanto alcuni dei molti saggi da me fatti per determinare la precisione delle posizioni fotografiche.

I. Ho paragonato fra loro le posizioni fotografiche di 42 stelle di confronto appartenenti a lastre degli Osservatorî di Parigi e di Bordeaux, prendendo i dati relativi dalla circolare N°. 10 dell' Osservatorio di Parigi. Le stelle furono la 53°,470 della D. M. e le seguenti nella circolare (p. 162) fino alla 52°,609. Ho formato le divergenze per α e δ fra le posizioni fotografiche date da Parigi e quelle date da Bordeaux. Senza ricorrere ai quadrati, ho formata la media aritmetica di dette divergenze, prese in valore assoluto, per α e δ, ottenendo i valori rispettivi: $\pm$ 0ˢ,0210 e $\pm$ 0″,197. La divergenza di una posizione fotografica dal valore medio fra due posizioni fotografiche è dunque la metà di questi valori, cioè: $\pm$ 0ˢ,0105 , $\pm$ 0″,0985. In seguito per ognuna delle 42 stelle ho formato le divergenze fra le posizioni meridiane date dai diversi Osservatorî ed il valore medio, cioè la media di queste posizioni (come è stata calcolata a Parigi), ed all' istesso modo che per le fotografiche, per ognuna di dette stelle ho formata la media di dette divergenze, dividendo cioè la somma delle divergenze dalla media, prese in valore assoluto, pel loro numero. Addizionando tutte queste medie delle divergenze relative ad ognuna delle 42 stelle, ho divisa la somma per 42, ed ho ottenuto così per valori della divergenza di una posizione meridiana dalla media: $\pm$ 0ˢ,0461 , $\pm$ 0″,363. Siccome tanto le posizioni fotografiche, date dai due Osservatorî, quanto le posizioni meridiane fornite da molti Osservatorî, furono ottenute nella stessa epoca, cioè nella seconda metà dell'anno 1900, il confronto fra i risultati dei due metodi è legittimo anche per questo capo.

Essendo poi le divergenze medie, ottenute come sopra, vicine in valore a quelle che si otterrebbero ricorrendo ai quadrati, se si credessse di potere per ciò applicare anche in questo caso i criterî del metodo dei minimi quadrati, per giudicare della precisione relativa dei due generi di misura, si avrebbe che nell' esempio citato la precisione delle posizioni fotografiche è per α più di 16 volte maggiore di quella delle posizioni meridiane, per δ un po' meno di 16 volte maggiore. Ma questa proporzione varia secondo i casi.

II. Il secondo saggio che riferisco poggia sopra considerazioni di genere un po' diverso, cioè sul confronto della divergenza massima fra più posizioni fotografiche di una stella con la divergenza massima fra le posizioni meridiane, date per la medesima stella da diversi Osservatorî. Ho ridotto col mio metodo le lastre N^{i} 775 e 1856 di Catania, aventi 9 stelle di confronto comuni, e per ognuna di dette stelle ho adottata per posizione fotografica la media dei risultati delle due lastre. Siccome di queste 9 stelle sono date nella citata circolare le posizioni fotografiche ottenute a Parigi e per 4 di esse anche le posizioni adottate a Bordeaux, ho per ogni stella paragonate fra loro le posizioni fotografiche di Parigi, Catania e Bordeaux (quando ve n'erano) e scritta per ognuna delle 9 stelle la divergenza più grande fra le posizioni fotografiche dei detti Osservatorî. Ho poi d'altra parte paragonate fra loro, per ognuna delle 9 stelle le posizioni meridiane ottenute in diversi Osservatorî, in occasione delle osservazioni di *Eros*, e parimenti scritta per ogni stella la divergenza massima.

I risultati si trovano nel quadro seguente, nel quale i piccoli numeri scritti sotto i secondi delle ascensioni rette fotografiche per Parigi, Bordeaux e Catania indicano il numero di lastre, su cui la posizione fotografica è poggiata.

Posizioni fotogr. pel 1900,0						Posizioni fotogr. pel 1900,0				
Diverg. merid.	Parigi	Bord.	Catania	Diverg. fotograf.	Diverg. merid.	Parigi	Bord.	Catan.	Diver. fotogr.	Diver. merid.
°	h m s	s	s	s	s	° ′ ″	″	″	″	″
48,746	2.37.22,085 2		22,073 2	0,012	0,06	48.48 20,30	″	20,58	0,28	1,2
48,750	» 38.56,222 5		56,244 2	0,022	0,15	48.32. 8,16		7,98	0,22	1,2
48,760	» 41.25,413 4	25,398 5	25,396 2	0,017	0,06	48.48. 6,30	6,21	6,51	0,30	0,9
47,700	» 41.43,828 5		43,840 2	0,012	0,23	48. 2. 9,92		9,64	0,28	1,2
48,762	» 42. 1,295 4	1,274 2	1,267 2	0,028	0,18	48.45.58,93	58,77	59,44	0,67	0,8
48,763	» 42.27,528 5	27,523 5	27,498 2	0,030	0,28	48.53. 4,87	4,55	5,14	0,59	1,2
48,764	» 42.43,272 5		43,241 2	0,031	0,12	48.27.49,24		49,21	0,03	1,2
48,770	» 44.19,649 2	19,659 4	19,649	0,026	0,33	48.56.10,40	10,07	10,58	0,51	1,4
47,714	» 44.39,926 4		39,926 2	0,017	0,09	48. 5.32,45		32,22	0,23	1,4
			medio	±0,0217	±0,167			medio	±0,346	±1,167

Le divergenze meridiane sono date con una cifra di meno, perchè le posizioni date dai diversi Osservatorî vanno fino a questa approssimazione.

La mancanza delle posizioni fotografiche di Bordeaux per 5 sulle 9 stelle non può togliere forza al metodo qui seguito, perchè le posizioni di Catania essendo poggiate appena su due lastre, deve *a priori* ritenersi che le diver-

genze più grandi debbano verificarsi per esse. Ciò è confermato in parte dal quadro precedente, ma anche più dal confronto delle posizioni fotografiche di Parigi e Bordeaux per tutta la serie di stelle della circolare N°. 10, per le quali, generalmente, le divergenze sono minori di quelle risultanti per queste 9 stelle fra i detti due Osservatorî.

Dal quadro precedente si rileva che il medio delle divergenze più grandi fra le posizioni fotografiche è per α presso a poco 8 volte minore del medio corrispondente per le posizioni meridiane; per δ è più di 4 volte minore. È dunque evidente la grande superiorità delle posizioni fotografiche sulle più esatte posizioni meridiane attuali. Ciò è tanto più vero in quanto le divergenze meridiane date nel quadro precedente si riferiscono ad osservazioni fatte nell'istessa epoca, mentre le lastre di Catania (le quali dànno il maggior numero delle divergenze più grandi) non furono eseguite in quell'epoca, come invece ha luogo per le posizioni fotografiche di Parigi e Bordeaux.

III. Un altro fatto importante che risulta dal confronto delle posizioni fotografiche fra loro, è che la precisione di queste aumenta ben poco col moltiplicare il numero delle lastre sulle quali si fanno riposare. Ciò si deduce sia dal quadro precedente, sia e molto più dal confronto delle posizioni fotografiche di Parigi e Bordeaux relativamente alle 42 stelle di cui sopra. Fra queste, per citare qualche esempio, si vede (circolare N°. 10, p. 163) che per una stella la posizione fotografica di Parigi, poggiata su 25 lastre, differisce da quella di Bordeaux, poggiata su 7 lastre, per $0^s,023$, $0'',003$; per un'altra stella, le posizioni della quale riposano rispettivamente su 28 e 10 lastre, le divergenze fra i detti due Osservatorî sono: $0^s,012$, $0'',028$. Invece per una stella poggiata su 3 lastre in Parigi e 3 in Bordeaux le divergenze sono appena: $0^s,012$, $0'',19$. E siffatti esempî si potrebbero moltiplicare.

Io trovo una conferma di questo fatto nell'esame delle divergenze residuali fra le posizioni meridiane adottate per le stelle di confronto e le posizioni fotografiche delle medesime stelle. Infatti, se paragoniamo fra loro i detti residui per stelle ridotte in diversi Osservatorî con numero molto diverso di lastre, troviamo che quei residui non sono molto diversi fra loro; sicchè poco giova il moltiplicare il numero delle lastre su cui si fa riposare la posizione fotografica.

Per non ricorrere ad altri esempî, io do nel quadro seguente per le 9 stelle, di cui sopra, le divergenze residuali: posizione meridiana—posizione fotografica, per Parigi, Bordeaux e Catania. Si noti che le posizioni meridiane cui ho paragonate le fotografiche, sono quelle adottate rispettivamente in questi tre Osservatorî (1). Anche nel quadro seguente i piccoli numeri scritti

(1) Non essendo state pubblicate per le stelle di riferimento di *Eros* le posizioni meridiane da adottarsi, ogni Osservatorio che ne aveva bisogno ha dovuto far da sè il

sotto i secondi di ascensione retta indicano il numero di lastre sulle quali riposa la rispettiva posizione fotografica. Si noti che le coordinate rettilinee delle stelle sulla lastra furono a Parigi dedotte dalla misura di due immagini (di ogni stella) ognuna misurata due volte, e queste quattro misure furono ripetute in quattro orientamenti, diversi per 90°. Le coordinate di Catania poggiano sulla misura di una sola immagine fatta una sola volta in un orientamento ed un'altra volta in un orientamento a 180°.

Divergenze fra le posizioni meridiane e le fotografiche.

(Senso : merid.—fotog.).

per α			per δ		
Parigi	Bordeaux	Catania	Parigi	Bordeaux	Catania
s	s	s	″	″	″
+ 0,053 (2)		+ 0,049 (2)	+ 0,07		+ 0,19
— 0,017 (5)		0,000 (2)	— 0,14		— 0,41
— 0,011 (4)	— 0,025 (5)	— 0,035 (2)	— 0,03	— 0,13	+ 0,10
+ 0,008 (5)		+ 0,019 (2)	— 0,10		— 0,36
— 0,020 (4)	— 0,032 (2)	— 0,046 (2)	+ 0,15	— 0,04	+ 0,55
+ 0,009 (6)	+ 0,008 (5)	— 0,019 (2)	+ 0,08	— 0,10	+ 0,23
— 0,007 (5)		— 0,047 (2)	— 0,19		— 0,25
+ 0,005 (2)	+ 0,011 (4)	— 0,021 (2)	+ 0,50	+ 0,33	+ 0,73
— 0,021 (4)		— 0,047 (2)	+ 0,03		— 0,26

Il fatto del piccolo aumento di precisione delle posizioni fotografiche col moltiplicare le misure e le lastre mi sembra una prova evidente che esse rappresentano il limite superiore della precisione, cui si può giungere coi mezzi attuali di osservazione.

IV. L'ultimo quadro comparativo che qui riferisco riguarda le posizioni fotografiche e le meridiane di 18 stelle di confronto della lastra N°. 2057 di Catania. Delle medesime stelle abbiamo pure le posizioni fotografiche ottenute a Bordeaux non con una sola lastra, come in Catania, ma con parecchie. Le dette stelle non furono fotografate in Parigi. Nel quadro seguente

---

lavoro del calcolo delle posizioni medie, deducendole dalle posizioni meridiane fornite dai diversi Osservatorî. Siccome poi nel dare i pesi a queste posizioni si sono seguiti criterî diversi a Parigi, Bordeaux e Catania, le posizioni medie meridiane adottate in questi tre Osservatorî sono diverse per quantità minime.

io do per ogni stella le divergenze fra le posizioni fotografiche, date da quei due Osservatorî, e poi le divergenze massime fra le posizioni meridiane date da diversi Osservatorî. Naturalmente, perchè il confronto dei due generi di misure fosse legittimo, avrei dovuto paragonare fra loro le posizioni fotografiche non di due Osservatorî, ma di parecchi. Però non mi è stato possibile ottenere i dati necessarî per questo. Ad ogni modo, dai quadri precedenti si può dedurre che le divergenze massime fotografiche, nel caso di molti Osservatorî, non sarebbero sensibilmente più grandi di quelle fra le sole posizioni di Bordeaux e Catania, le quali ultime divergenze sono d'altra parte rese più grandi dalla differenza fra le epoche, in cui furono fotografate le lastre; infatti l'epoca media delle lastre di Bordeaux è il 1900,8, mentre la lastra di Catania fu eseguita dal prof. Riccò il 28 agosto 1903. Invece le posizioni meridiane, fra le quali do qui le divergenze massime, si riferiscono tutte alla stessa epoca.

	Posizioni fotografiche nel 1900,0				Differenze		Diverg. massime fra due posiz. meridiane	
D. M.	Bordeaux	Catania	Bordeaux	Catania	Bordeaux	Catania		
°	h m s	s	° ′ ″	″	s	″	s	″
51,317	1.24.26,147 (3)	26,135	51.34.41,71	41,35	+ 0,012	+ 0,36	0,17	2,6
49,401	24.37,849 (2)	37,821	50. 9. 7,16	7,30	+ 0,028	— 0,14	0,14	1,4
49,400	24.38,426 (3)	38,401	50. 5.56,10	55,81	+ 0,025	+ 0,29	0,15	2,2
50,297	25.41,687 (3)	41,693	50.55.13,84	14,82	— 0,006	— 0,98	0,13	1,1
50,298	26.12.652 (2)	12,714	50.38.51,85	51,90	— 0,062	— 0,05	0,13	2,2
50,299	26.22,631 (2)	22,648	50.18.34,51	35,04	— 0,015	— 0,53	0,13	1,4
50,300	26.48,642 (4)	48,656	50.58. 5,01	5,10	— 0,014	— 0,09	0,30	1,5
50,301	26.59,920 (3)	59,945	50.22. 1,17	1,61	— 0,025	— 0,44	0,34	1,4
51,331	27.58,708 (4)	58,722	51.19.13,29	12,59	— 0,014	+ 0,70	0,12	2,5
49,414	28.19,574 (3)	19,582	50. 1. 1,62	1,92	— 0,008	— 0,30	0,23	2,1
51,334	28.33,783 (4)	33,808	51.38.28,99	28,55	— 0,025	+ 0,44	0,18	1,0
51,338	29.22,542 (4)	22,581	51.39. 7,87	7,25	— 0,039	+ 0,65	0,31	1,7
49,416	30. 5,718 (3)	5,705	50.12.23,77	24,43	+ 0,013	— 0,66	0,27	1,2
51,339	30.24,396 (4)	24,383	51.14.15,90	15,80	+ 0,013	+ 0,16	0,22	0,8
50,314	30.44,606 (3)	44,581	50.44.59,37	59,94	+ 0,025	— 0,57	0,21	0,6
49,422	31.42,180 (3)	42,178	50. 5.47,45	47,60	+ 0,002	— 0,15	0,24	3,4
51,357	33.13,708 (4)	13,651	51 45.32,45	32,19	+ 0,057	+ 0,26	0,33	7,9
51,363	34. 2,612 (1)	2,551	51.21.27,81	27,56	+ 0,061	+ 0,25	0,26	1,8
					medio: ± 0,0247	± 0,387	± 0,2144	± 1,711

V. Riassumendo, ecco le conclusioni principali cui sono giunto:

1°. Se si misurano una sola volta le coordinate rettilinee della sola immagine più grande di una stella (fra le due immagini che si ottengono in Catania) in un orientamento della lastra, e si ripete la misura sulla stessa immagine in un orientamento a 180° dal primo, la media dei valori ottenuti per le coordinate della stella nelle due posizioni della lastra è più esatta della media che si otterrebbe col misurare sempre nella stessa orientazione due immagini della stella, ognuna due volte, come si fa, per esempio, a Parigi.

2°. Non avendo io preso ad esame stelle di grandezza inferiore alla 10ª, non ho potuto constatare l'errore dipendente dallo strato di gelatina; però il fatto che fino alla 10ª grandezza le divergenze (relative alla stessa stella) fra le posizioni fotografiche ottenute in diversi Osservatorî e le posizioni meridiane sono vicine fra loro, sembra confermare che fino a quella grandezza l'influsso di quello strato è quasi nullo, non potendosi ammettere che su lastre di diversi Osservatorî gli effetti di quella causa di errore sieno eguali.

3°. La precisione delle coordinate celesti delle stelle di confronto dedotte dalle lastre, è sempre per le ascensioni rette per lo meno 10 volte maggiore di quella delle posizioni poggiate sopra parecchie osservazioni al circolo meridiano; spesso quella precisione è più di 15 volte maggiore. Quanto alle declinazioni, la precisione delle posizioni fotografiche è almeno 4 volte maggiore di quella delle meridiane, spesso più di 7 volte.

4°. Risultando dagli studî fatti a Catania e altrove che la precisione delle posizioni fotografiche delle stelle non prese per confronto (per determinare le costanti della lastra) è inferiore a quella delle posizioni delle stelle di confronto, presso a poco nella proporzione di 1 a 2, può dirsi che la precisione delle posizioni fotografiche di dette stelle è per α almeno 5 volte maggiore di quella delle posizioni meridiane; per δ poi almeno 2 volte maggiore. Ben inteso che questo si riferisce a lastre, le costanti delle quali furono determinate con 10 o 12 stelle di confronto. Per lastre sulle quali si poterono trovare 20 o più stelle di confronto, la precisione delle posizioni fotografiche è quasi la stessa per tutte le stelle della lastra.

Meccanica. — *Sul moto d'un sistema olonomo di corpi rigidi.* Nota II [1] del dott. M. CONTARINI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

7. Nella Nota precedente ho stabilito che all'identità

$$P_{hi} \equiv P_{ki}, \tag{10}$$

esprimente che un punto P_{hi} appartenente a C_h coincide costantemente con un punto P_{kj} di C_k, corrispondono i due sistemi di equazioni:

$$\xi_{kj} - \xi_{hi} = 0; \text{ ecc.}; \tag{11}$$

$$\delta\xi_{kj} - \delta\xi_{hi} = 0; \text{ ecc.}; \tag{11'}$$

le quali, in virtù rispettivamente delle (1') e delle (3), prendono la forma:

$$\xi_{k0} - \xi_{h0} = a_{hi} - a_{kj}; \text{ ecc.} \tag{11$_1$}$$

$$\delta\xi_{k0} - \delta\xi_{h0} + \delta\chi_k c_{kj} - \delta\chi_h c_{hi} - \delta\varrho_k b_{kj} + \delta\varrho_h b_{hi} = 0; \text{ ecc.} \tag{12}$$

Poichè le (12) sono indipendenti fra loro [2], possiamo asserire che l'esistenza d'un solo punto comune a due corpi toglie al sistema *tre* gradi di libertà.

Supponiamo ora che i due corpi abbiano un secondo punto comune (nel qual caso il sistema perde *cinque* gradi di libertà) e sia:

$$P_{hi'} \equiv P_{kj'}, \tag{10'}$$

Intanto fra i coseni direttori u, v, w del vettore $P_{hi}P_{hi'} \equiv P_{kj}P_{kj'}$, le coordinate $\xi_{hi} = \xi_{kj}, \ldots, \zeta_{hi'} = \zeta_{kj'}$ dei suoi punti estremi (tutti riferiti al sistema $\Omega(\xi\,\eta\,\zeta)$) e la sua lunghezza l, passano le relazioni

$$lu = \xi_{hi'} - \xi_{hi} = \xi_{kj'} - \xi_{kj}\ ;\ lv = \text{ecc.}; \tag{13}$$

e quindi per le (1) valgono le eguaglianze

$$lu = a_{hi'} - a_{hi} = a_{kj'} - a_{kj}\ ;\ lv = \text{ecc.} \tag{14}$$

Ora dalle tre equazioni

$$\delta\xi_{k0} - \delta\xi_{h0} + \delta\chi_k c_{kj'} - \delta\chi_k c_{hi'} - \delta\varrho_k b_{kj'} + \delta\varrho_h b_{hi'} = 0, \text{ ecc.},$$

che corrispondono all'identità (10'), è lecito sottrarre ordinatamente le (12),

[1] V. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem. 1903, pag. 507.

[2] Infatti, considerando come incognite tutte le quantità sotto il simbolo δ, si trova che non tutti i minori di 3° ordine della matrice che ha per elementi i coefficienti delle incognite sono identicamente nulli: per esempio i minori formati coi coefficienti di $\delta\xi_{h0}, \delta\eta_{h0}, \delta\zeta_{h0}$, oppure di $\delta\xi_{k0}, \delta\eta_{k0}, \delta\zeta_{k0}$ sono eguali all'unità.

con le quali esse devono coesistere; e in virtù delle (14) le differenze si possono mettere sotto la forma

$$(\delta\chi_k - \delta\chi_h)\, lw = (\delta\varrho_k - \delta\varrho_h)\, lv \,;\ \text{ecc.}:$$

o anche, dividendole ordinatamente per lvw, lwu, luv, sotto la forma:

$$(12') \qquad \frac{\delta\pi_k - \delta\pi_h}{u} = \frac{\delta\chi_k - \delta\chi_h}{v} = \frac{\delta\varrho_k - \delta\varrho_h}{w}\,.$$

Da queste, chiamando con $\Delta\vartheta$ il valore comune delle tre frazioni, abbiamo:

$$(15) \qquad \delta\pi_k = \delta\pi_h + u\Delta\vartheta \ ;\ \delta\chi_k = \text{ecc.}$$

e quindi le (12), tenuto conto anche delle (11_1), diventano

$$(16) \quad \delta\xi_{k0} - \delta\xi_{h0} = \delta\chi_h(\zeta_{k0} - \zeta_{h0}) - \delta\varrho_h(\eta_{k0} - \eta_{h0}) + \Delta\vartheta\,(b_{kj}\,w - c_{kj}\,v)\,;\ \text{ecc.}$$

È importante osservare che queste equazioni non dipendono effettivamente dalle coordinate del secondo punto comune ai due corpi, ma soltanto *dalla direzione della retta* determinata dai due punti: infatti queste coordinate potrebbero al più essere contenute nei coseni direttori u, v, w, come apparisce dalle equazioni (13); ma se i coseni direttori della retta riferiti agli assi solidali rispettivamente con C_h, C_k sono u_h, v_h, w_h, u_k, v_k, w_k, abbiamo le sei relazioni

$$lu_h = x_{hi'} - x_{hi'}\,,\ \ldots\,,\ lw_k = z_{kj'} - z_{kj}\,;$$

e quindi le (14), ricordando le posizioni (a) (I Nota), danno per i coseni le espressioni

$$(17) \quad u = \alpha_{h1}\,u_h + \alpha_{h2}\,v_h + \alpha_{h3}\,w_h = \alpha_{k1}\,u_k + \alpha_{k2}\,v_k + \alpha_{k3}\,w_k \ ;\ v = \text{ecc.}$$

È ovvio che i due corpi non hanno in comune soltanto i due punti ricordati, ma tutti i loro punti materiali eventualmente situati sulla retta $P_{hi}\,P_{hi'} \equiv P_{kj}\,P_{kj'}$. Riassumendo possiamo dunque dire che « se esiste un solo punto $P_{hi} \equiv P_{kj}$ comune ai due corpi C_h, C_k, le equazioni dei legami prendono la forma (12); se invece esiste in comune una retta passante per $P_{hi} \equiv P_{kj}$ e di coseni direttori u, v, w, le equazioni dei legami prendono la forma (15), (16): a queste equazioni si intendono sempre associate le (11_1) e nel secondo caso anche le (17) » [1].

[1] Il sistema (15), (16) comprende effettivamente *sei* equazioni distinte; ma siccome vi comparisce la nuova arbitraria $\Delta\vartheta$, esso toglie al sistema di corpi *cinque soli* gradi di libertà.

Sarebbe poi da osservare che oltre alle (11_1), corrispondenti all'identità (10), esistono altre tre equazioni analoghe corrispondenti alle (10'); ma da queste è lecito sottrarre

8. D'ora in poi supporrò che fra i corpi del sistema esistano soltanto legami della specie considerata; anzi un caso particolare di questi legami, per il quale il sistema si riduce a una *catena* di corpi rigidi. Supporrò cioè che, dati i corpi C_h in un certo ordine, definito dalla successione dei valori attribuiti all'indice h, ciascuno d'essi, escluso l'ultimo, sia legato *almeno* per un punto d'indice $i = 1$ al punto d'indice $i = 0$ del corpo successivo.

In tale ipotesi per le identità

$$(10'') \qquad P_{r1} \equiv P_{r+1\,0} \qquad (r = 1, 2, \dots h, \dots, n-1)$$

esistono due sistemi ciascuno di $3(n-1)$ equazioni analoghe alle (11) e (11'), il cui sviluppo si ottiene direttamente dalle (11_1), (12) ponendovi:

$$h = r \ , \ k = r+1 \ , \ i = 2 \ , \ j = 0.$$

Con tale sostituzione, osservando che per le (1') è

$$a_{k0} = b_{k0} = c_{k0} = 0 \qquad (k \text{ qualunque})$$

e facendo le posizioni

$$(g) \qquad a^{(ri)} = \delta\chi_r\, c_{ri} - \delta\varrho_r\, b_{ri} \ ; \ b^{(ri)} = \text{ecc.}\ (^1),$$

le (11_1) e le (12) danno rispettivamente le equazioni

$$\left.\begin{aligned} (18) \qquad & \xi_{r+1\,0} - \xi_{r0} = a_{r1} \ ; \ \text{ecc.} \\ (18') \qquad & \delta\xi_{r+1\,0} - \delta\xi_{r0} = a^{(r1)} \ ; \ \text{ecc.} \end{aligned}\right\} (r = 1, \dots, h, \dots n-1).$$

Da queste equazioni, sommate rispetto ad r da h a $k-1$ $(k > h)$, si ottengono i sistemi equivalenti

$$\left.\begin{aligned} (18_1) \qquad & \xi_{k0} - \xi_{h0} = \sum_h^{k-1} a_{r1} \ ; \ \text{ecc.} \\ (18_1') \qquad & \delta\xi_{k0} - \delta\xi_{h0} = \sum_h^{k-1} a^{(r1)} \ ; \ \text{ecc.} \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} k > h \\ h = 1, 2, \dots, n-1 \end{pmatrix};$$

---

ordinatamente le (11_1); e le differenze che si ottengono

$$a_{hi'} - a_{kj'} - a_{hi} + a_{kj} = 0, \text{ ecc.}$$

messe sotto la forma

$$a_{hi'} - a_{hi} = a_{kj'} - a_{kj} \ ; \text{ ecc.}$$

sono implicitamente comprese nelle (14), ossia nelle (17) delle quali appunto s'è fatta menzione.

(1) Si intende bene che i simboli $a^{(ri)}, \dots$, definiti dalle (g) e introdotti per analogia di scrittura, non hanno nulla di comune coi simboli $a^{(uh)}, \dots$ definiti dalle (e) (I Nota), dei quali non avrò più occasione di occuparmi.

e in particolare per $h = 1$

$$\left.\begin{aligned} (18_2) \qquad & \xi_{k0} = \xi_{10} + \sum_1^{k-1}{}_r\, a_{r1} \ ; \ \text{ecc.} \\ (18'_2) \qquad & \delta\xi_{k0} = \delta\xi_{10} + \sum_1^{k-1}{}_r\, a^{(r1)} \ ; \ \text{ecc.} \end{aligned}\right\} (k = 2, \dots, n).$$

Così sono messe in evidenza come eventualmente arbitrarie le traslazioni del primo corpo: volendo invece fare qualche ipotesi speciale sulle traslazioni d'un corpo generico C_q, basta sottrarre da ciascuna delle (18_2) e $(18'_2)$ quella che corrisponde all'indice $k = q$: così appunto facendo e cambiando poi l'indice k in h, si ottiene il sistema

$$(18_3) \qquad \xi_{h0} = \xi_{q0} + \sum_1^{h-1}{}_r\, a_{r1} - \sum_1^{q-1}{}_r\, a_{r1} \ ; \ \eta_{h0} = \text{ecc.}$$

$$(18'_3) \qquad \delta\xi_{h0} = \delta\xi_{q0} + \sum_1^{h-1}{}_r\, a^{(r1)} - \sum_1^{q-1}{}_r\, a^{(r1)} \ ; \ \delta\eta_{h0} = \text{ecc.}$$

$$(h = 2, 3, \dots, n) \ (^1)$$

al quale si devono aggiungere le equazioni

$$(18_4) \qquad \xi_{10} = \xi_{q0} - \sum_1^{q-1}{}_r\, a_{r1} \ ; \ \eta_{10} = \text{ecc.},$$

$$(18'_4) \qquad \delta\xi_{10} = \delta\xi_{q0} - \sum_1^{q-1}{}_r\, a^{(r1)} \ ; \ \delta\eta_{10} = \text{ecc.},$$

ottenute direttamente dalle (18_2), $(18'_2)$, ponendovi $k = q$.

Valendomi ora della regola enunciata al n. 5 (Nota I), trasformo subito la equazione simbolica (7) tenendo conto dei legami (10″) e senza curarmi di altri vincoli eventualmente aggiunti; di tutte le equazioni effettive (18′), $(18'_1), \dots$ corrispondenti alle condizioni (10″), considero le $(18'_3)$, $(18'_4)$ che sono le più generali. Sostituendo alle traslazioni virtuali i valori dati da queste equazioni la (7) diventa:

$$\sum_1^n{}_h (\mathrm{X}_h\, \delta\xi_{h0} + \mathrm{X}^{(h)}\, \delta\pi_h + \text{ecc.}) = \mathrm{X}_1 \left(\delta\xi_{q0} - \sum_1^{q-1}{}_r\, a^{(r1)}\right) + \mathrm{X}^{(1)}\, \delta\pi_1 + \text{ecc.} +$$

$$+ \sum_2^n{}_h \left(\mathrm{X}_h \left[\delta\xi_{q0} + \sum_1^{h-1}{}_r\, a^{(r1)} - \sum_1^{q-1}{}_r\, a^{(r1)}\right] + \mathrm{X}^{(h)}\, \delta\pi_h + \text{ecc.}\right) =$$

$$= \delta\xi_{q0} \sum_1^n{}_h \mathrm{X}_h + \sum_2^n{}_h \mathrm{X}_h \sum_1^{h-1}{}_r\, a^{(r1)} - \sum_1^{q-1}{}_r\, a^{(r1)} \sum_1^n{}_h \mathrm{X}_h + \sum_1^n{}_h \mathrm{X}^{(h)}\, \delta\pi_h + \text{ecc.} = 0.$$

(1) A rigore dovrebbe essere escluso il valore q dell'indice h; ma le equazioni corrispondenti a questo valore sono sempre esatte riducendosi alle identità

$$\xi_{q0} = \xi_{q0}, \dots, \delta\zeta_{q0} = \delta\zeta_{q0}.$$

E siccome la seconda di queste somme si può trasformare così:

$$\sum_{2}^{n}{}_{h} X_h \sum_{1}^{h-1} a^{(r1)} = \sum_{1}^{n-1}{}_{t} a^{(t1)} \sum_{t+1}^{n}{}_{\tau} X_\tau \ (^1),$$

sostituendo al simbolo $a^{(r1)}$ il suo valore (g), scrivendo tutti i termini omessi (che si possono dedurre da quelli già scritti permutando circolarmente le terne di lettere X , Y , Z ; ξ , η , ζ ; π , χ , ϱ), e raccogliendo a fattori comuni $\delta\pi_1$, ... , $\delta\varrho_n$, si arriva all'equazione simbolica trasformata:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} &A\delta\xi_{q0} + B\delta\eta_{q0} + C\delta\zeta_{q0} + \sum_{1}^{q-1}{}_{r} (A_r\,\delta\pi_r + B_r\,\delta\chi_r + C_r\,\delta\varrho_r) + \\ &\qquad + \sum_{q}^{n}{}_{s} (H_s\,\delta\pi_s + K_s\,\delta\chi_s + L_s\,\delta\varrho_s) = 0 ; \end{aligned} \right.$$

nella quale ho posto per brevità:

$$(h) \qquad A = \sum_{1}^{n}{}_{h} X_h ; \text{ ecc.}$$

$$(i) \quad \left\{ A_r = \sum_{1}^{r}{}_{t} (c_{r1}\,Y_t - b_{r1}\,Z_t) + X^{(r)} ; \text{ ecc.} \qquad (r = 1 , 2 , \dots , q - 1) \right.$$

$$(j) \quad \left\{ H_s = \sum_{s+1}^{n}{}_{\tau} (b_{s1}\,Z_\tau - c_{s1}\,Y_\tau) + V^{(s)} ; \text{ ecc.} \qquad (s = q , q+1 , \dots , n-1) \right.$$

$$(j') \qquad H_n = X^{(n)} ; \text{ ecc.}$$

Tutti gli altri coefficienti si ottengono da questi permutando circolarmente le terne di lettere A , B , C ; H , K , L ; X , Y , Z ; a , b , c. *A queste posizioni si intendono associate le posizioni* (a), (b).

In particolare se $q = 1$ vengono a mancare i coefficienti A_r , B_r , C_r e la equazione (19) diventa identica alla (7) della Nota testè citata (pp. 385-6), come del resto era facilmente prevedibile.

9. Per quanto ho stabilito in principio del numero precedente, le ulteriori condizioni eventualmente imposte alla *catena* sono sempre del tipo (10), cioè sono rappresentate da equazioni analoghe alle (12) oppure alle (15), (16). Resta a vedere come queste equazioni siano trasformate in virtù delle condizioni (10″), dalle quali oramai non si può più prescindere.

Se due corpi non *consecutivi* C_h , C_k hanno in comune il punto $P_{hi} \equiv P_{kj}$ valgono le (12): ma esistono sempre le ($18_1'$) le quali nel caso presente di

(1) V. un calcolo analogo nella I Nota: *Sul problema fondamentale della sismografia*, pag. 384.

$k > h+1$ si possono anche scrivere

$$\delta\xi_{k0} - \delta\xi_{h0} = a^{(h1)} + \sum_{h+1}^{k-1}{}_r\, a^{(r1)} \; ; \text{ ecc.}, \tag{20}$$

e quindi le (12), ricordando le posizioni (g), diventano

$$a^{(h1)} - a^{(hi)} + \sum_{h+1}^{k-1} a^{(r1)} + a^{(kj)} = 0 \; ; \text{ ecc.} \tag{21}$$

Se invece i due corpi *non consecutivi* C_h, C_k, hanno in comune la retta di coseni u, v, w, passante per $P_{hi} \equiv P_{kj}$, valgono le equazioni (15) e (16) ossia le equazioni (15) e le

$$\delta\chi_h\, c - \delta\varrho_h\, b + \sum_{h+1}^{k-1}{}_r\, a^{(r1)} = \Delta\vartheta\,(b_{ki}\, w - c_{kj}\, v) \; ; \text{ ecc.}, \tag{22}$$

ottenute confrontando le (16) con le (20) e facendo le posizioni

$$a = a_{h1} + \xi_{h0} - \xi_{k0} \; ; \; b = \text{ecc.} \; ;$$

è da notare che per le (18_1) risulta

$$(k) \qquad a = -\sum_{h+1}^{k-1} a_{r1} \, , \; b = -\sum_{h+1}^{k-1} b_{r1} \, , \; c = -\sum_{h+1}^{k-1} c_{r1} \, .$$

Infine se due corpi *consecutivi* C_h, C_{h+1} hanno in comune una retta, questa deve passare per il punto $P_{h1} \equiv P_{h+1}$, che per le $(10'')$ è sempre comune ai due corpi: ma poichè dell'esistenza di questo punto comune si è già tenuto conto portando la equazione simbolica dei lavori virtuali dalla forma (7) alla (19), basta tener presenti soltanto le (15), ridotte nel caso presente a

$$\delta\pi_{h+1} = \delta\pi_h + u\,\Delta\vartheta \; ; \; \delta\chi_{h+1} = \text{ecc.} \tag{23}$$

Insieme con le equazioni finora esaminate si trasformano anche le equazioni in termini finiti che a quelle sono sempre associate: così p. e. nel caso d'un punto o d'una retta comuni ai corpi C_h, C_k $(k > h+1)$ valgono le (11_1), che confrontate con le (18_1) danno:

$$a_{h1} - a_{hi} + \sum_{h+1}^{k-1}{}_r\, a_{r1} + a_{kj} = 0 \; ; \text{ ecc.} \tag{21$_1$}$$

Nel caso d'una retta comune agli stessi corpi a questa si intendono associate

le (17), e nel caso d'una retta comune ai due corpi consecutivi C_h, C_{h+1}, valgono ancora le (17) ridotte alla forma

$$(23_1) \qquad u = \alpha_{h1}\, u_h + \cdots = \alpha_{h+1\,1}\, u_{h+1} + \text{ecc.} \; ; \; v = \text{ecc.}$$

Si dovrebbe ora trasformare ulteriormente la (19), tenendo conto dei nuovi legami; e cioè sostituire alle caratteristiche $\delta\pi_h, \ldots, \delta\varrho_k$ i valori ottenuti risolvendo, secondo i casi, le equazioni (21) o le (22) e (15), o le (23). Ma le equazioni (15) e (23) si possono ritenere già risolute; quanto alla risoluzione delle (21) e (22) richiederebbe calcoli algebrici lunghi e senza interesse. Perciò non mi dilungo; solo mi limito a far notare due proprietà di questi sistemi, che si possono facilmente verificare tenendo presenti le (g), le (21_1) e le (k):

1°. In ciascuna delle equazioni (21), (22) la somma dei coefficienti di tutte le caratteristiche omonime (p. e. di $\delta\pi_h, \delta\pi_{h+1}, \ldots, \delta\pi_k$) è eguale a zero.

2°. In ciascuno dei sistemi (21) e (22) i determinanti di terzo ordine formati con le colonne corrispondenti alle tre caratteristiche d'uno stesso corpo (p. e. $\delta\pi_r, \delta\chi_r, \delta\varrho_r$) o a tre caratteristiche omonime di corpi diversi (p. e. $\delta\pi_h, \delta\pi_r, \delta\pi_k$) sono tutti nulli, *e quindi nessuno dei due sistemi può essere risoluto rispetto a tali gruppi di incognite.*

10. Per concludere la trattazione in generale del problema propostomi, e avviarmi alle sue applicazioni pratiche, esamino brevemente altre condizioni a cui può essere assoggettato il movimento dei corpi. Finora ho supposto che i varî corpi fossero bensì vincolati fra di loro, ma indipendenti da qualsiasi altro corpo estraneo al sistema. Però è facile estendere lo studio del movimento anche nell'ipotesi che la catena sia sospesa per uno o più punti ad un altro corpo rigido Γ, *purchè il moto di quest'ultimo non subisca alcuna influenza dal moto dei corpi sospesi.* Infatti se il corpo C_s è fissato a Γ per un suo punto P_{si}, le coordinate $\xi_{si}, \eta_{si}, \zeta_{si}$ di quest'ultimo devono avere in ogni istante un valore determinato dalla posizione del corpo Γ, la quale *per ipotesi* è indipendente dai parametri che definiscono il moto della catena. Dunque le traslazioni virtuali di P_{si} devono essere costantemente nulle: ricordando le (3), le $(18_3')$, e le (g), valgono dunque le tre equazioni

$$(24) \qquad \delta\xi_{q0} + \sum_1^{s-1}{}_r\, a^{(r1)} - \sum_1^{q-1}{}_r\, a^{(r1)} + a^{(si)} = 0 \; ; \text{ ecc.}$$

Se invece C_s e Γ avessero in comune una retta di coseni u, v, w e passante per P_{si}, si troverebbe col solito metodo che oltre alle (24) esistono altre *due* equazioni indipendenti

$$(25) \qquad \frac{\delta\pi_r}{u} = \frac{\delta\chi_r}{v} = \frac{\delta\varrho_s}{w} \, .$$

Ora prima di passare dalla (19) alle equazioni differenziali del moto, bisogna tener conto non solo delle condizioni (21), (22) e (16), o (23) eventualmente esistenti, ma anche di tutte le equazioni (24), (25) corrispondenti ai vincoli fra i corpi C_h e il corpo Γ.

La trasformazione della (19) in virtù di questi vincoli riesce più semplice quando Γ ha un punto M in comune con C_1 o con C_n, oppure due punti M, N rispettivamente in comune con due corpi consecutivi C_h, C_{h+1}. Infatti basta: nel primo caso portare in M l'origine del sistema cartesiano solidale con C_1, nel secondo caso considerare M come punto P_{n1} (v. n. 8) e portarvi l'origine del sistema cartesiano solidale con Γ, nel terzo caso considerare M come punto C_{h1}, e portare rispettivamente in M, N le origini dei coseni solidali con Γ, C_{h+1}, perchè le successioni di corpi ottenute nei singoli casi

$$\Gamma C_1 \dots C_n ;\ C_1 \dots C_n \Gamma ;\ C_1 \dots C_h \Gamma\, C_{h+1} \dots C_n$$

godano di tutte le proprietà attribuite alla *catena* $C_1 \dots C_n$.

In questi tre casi si ottiene dunque una nuova *catena*, nella quale, cambiando opportunamente la numerazione dei varî corpi, un posto qualunque di indice q è occupato appunto da Γ; nella quale cioè il corpo C_q ha un movimento prestabilito. Allora deve essere costantemente

$$\delta\xi_{q0} = \delta\eta_{q0} = \delta\zeta_{q0} = \delta\pi_q = \delta\chi_q = \delta\varrho_q = 0 ; \tag{26}$$

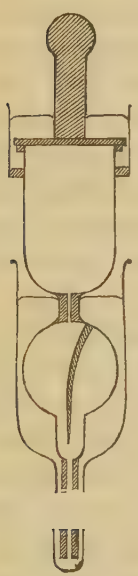
la equazione simbolica (19) si riduce ai soli termini

$$\sum_1^{q-1}{}_r (A_r\, \delta\pi_r + \dots) + \sum_{q+1}^{n}{}_s (H_s\, \delta\pi_s + \dots) = 0 \tag{27}$$

e tutte le altre equazioni (15), (21), (22), (23), (24), *che ora esprimono relazioni del tipo* (10) *fra corpi della catena*, si intendono sempre associate alle (24) e (27).

Fisica. — *Intorno ad alcune modificazioni del volumenometro e del modo d'usarlo ed intorno ad un volumenometro a peso.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio Blaserna.

Il volumenometro primitivo di Say è di gran lunga più semplice di tutti quelli che sono stati ideati in seguito, ma è certamente assai meno preciso; è facile tuttavia adattare ad esso le disposizioni ora generalmente in uso per rendere esatta la determinazione della pressione e del volume d'un gaz, ed allora esso senza perdere molto della sua semplicità diviene non meno preciso dei volumenometri più comunemente usati. Inoltre la precisione con esso ottenibile può anche essere non poco aumentata con una conveniente modificazione del processo sperimentale generalmente usato, e finalmente riesce altresì possibile di aumentare questa precisione determinando le variazioni della pressione e del volume dell'aria contenuta nel volumenometro mediante pesate di mercurio, cioè con un metodo molto più preciso di quello della lettura diretta.



Lo stereometro di Say modificato è rappresentato nella figura. Esso consta di un imbuto cilindrico A coll'orlo piano finamente smerigliato o levigato, comunicante inferiormente mediante un tubo capillare colla bolla piriforme B che inferiormente è cilindrica e comunica col tubo T lungo circa 50 cm., di 3 a 4 mm. di diametro interno ed a parete spessa. Questo tubo è diviso in millimetri e lo zero di questa divisione trovasi nella parte cilindrica della bolla e coincide coll'estremità inferiore d'un'astina assiale di smalto saldata o fissata con ceralacca alle pareti della bolla; la parte superiore della divisione per 10 o 20 cm. è inutile e può esser omessa, basta che sia tracciato lo zero e qualche divisione sopra e sotto ad esso che può esser talvolta utile.

Quest'imbuto con bolla e lungo tubo è sostenuto con un doppio spago formante anello, abbassando o sollevando il quale, si fa immergere il tubo più o meno in un profondo pozzetto pieno di mercurio, formato per economia di mercurio con un tubo di vetro di 8 a 10 millimetri di diametro interno, chiuso in fondo e saldato o masticiato alla sommità ad un tubo più largo di dimensioni tali che la bolla e parte dell'imbuto vi entrino comodamente. L'interposizione dello spago fra l'imbuto ed un'asta orizzontale di cui si

può regolare l'altezza ed a cui si appende lo spago, è utilissima per evitare le rotture che facilmente si producono quando si spinge rigidamente un tubo di vetro dentro un altro di poco più largo e i due assi siano un po' divergenti; lo spago funziona allo stesso tempo come un corto filo a piombo, e come un sostegno flessibile.

L'imbuto è chiuso come al solito da un disco di vetro piano, anch'esso finamente smerigliato o levigato; per evitare le difficoltà della chiusura che senza grasso o con grasso fluido è spesso imperfetta, mentre con grasso denso può rinchiudere un volume variabile di aria, ho ricorso al mercurio che è efficacissimo e non imbratta gli apparecchi. Perciò attorno alla parte superiore dell'imbuto è fissato, mediante un anello di sovero spesso 5 a 6 mm. e mediante ceralacca, un corto tubo di vetro che sorpassa di uno o due centimetri l'orlo dell'imbuto. Collocato su questo il disco otturatore e gravatolo d'un peso in ferro, si versa nello spazio anulare tanto mercurio che copra bene l'interstizio fra disco e imbuto, ed in tal modo la chiusura è perfetta contro un eccesso di pressione esterna; per evitare che il disco nel mercurio venga a galla, vi si può fissare superiormente con ceralacca un'asta di ferro o un largo tubo entro cui si versa mercurio. Per evitare che un po' d'aria rimanga, come si suole impropriamente dire, aderente al vetro fra il disco, l'imbuto e il mercurio e venga poi assorbita entro l'imbuto, giova che il disco otturatore abbia lo stesso diametro dell'imbuto ed abbia l'orlo cilindrico. Inoltre, per evitare che togliendo il disco il mercurio, che serve alla chiusura e che di solito non è molto pulito nè puro, penetri dentro l'imbuto, avevo cura di togliere prima dal disco il mercurio aspirandolo entro una minuscola pissette donde poi all'occorrenza veniva riversato attorno al disco.

[Ho anche provato a rendere molto più lungo il tubo capillare che sta fra la bolla e l'imbuto, e ripiegarlo all'ingiù in modo che l'imbuto diveniva una campanella coll'apertura rivolta verso il basso e coll'asse sul prolungamento di quello del lungo tubo e della bolla; il disco era collocato a galla sul mercurio d'una piccola bacinella che veniva sostenuta col doppio spago e collocata sotto la campanella in modo di chiuderla; ho però trovato che questa disposizione era meno comoda e più soggetta a peripezie].

Il modo d'operare per determinare con questo apparecchio il volume di un corpo non differisce essenzialmente da quello usato collo stereometro di Say. Immerso nel pozzetto il lungo tubo finchè o l'estremità inferiore di questo o la bolla trovano ostacolo, si regola la quantità di mercurio del pozzetto una volta per molte in modo che essendo l'imbuto aperto e la bolla ripiena di mercurio, questa bolla ed il tubo capillare sovrastante siano completamente immersi. Si chiude allora l'imbuto col suo disco e col mercurio, e in tal modo si è rinchiusa una quantità di aria il cui volume V è uguale alla capacità dell'imbuto e del tubo capillare, e la pressione è uguale a

quella atmosferica H. Piccole variazioni del livello esterno (anche di qualche millimetro) fanno variare il volume V di quantità trascurabili se la sezione del tubo capillare è abbastanza piccola; perciò non reca danno che la posizione del mercurio in esso tubo sia invisibile.

Si solleva l'imbuto e si appende lo spago ad un'asta orizzontale fissata, una volta per molte, a tale altezza che il livello interno del mercurio sorpassi di poco l'estremità inferiore dell'astina, che si fa poi affiorare alla superficie del mercurio in modo che questa non sia nè depressa nè sollevata per adesione all'astina. Questo esatto affioramento può ottenersi togliendo mercurio gradatamente dal pozzetto, ma è più comodo e facile inserire fra lo spago e l'asta cui esso è appeso, un cuneo lungo p. es. 10 cm. ed avente una differenza di spessore di 1 mm. alle estremità; così facendo avanzare questo cuneo di 1 mm. l'imbuto viene sollevato di 0,01 mm. Si può anche fra l'estremità di questo cuneo e l'asta inserire un secondo cuneo simile al primo, in tal modo se lo spago è appeso ad 1 cm. da un'estremità del primo cuneo ed il secondo cuneo è inserito sotto l'altra estremità, questa si innalzerà di 0,01 mm. e lo spago e l'imbuto di 0,001 quando questo secondo cuneo viene spinto di 1 mm.

Per rendere piccole quanto è possibile le differenze di forma della superficie del mercurio affiorante all'astina e le variazioni della pressione superficiale che ne derivano, giova togliere dal pozzetto con una pipetta un volume costante di mercurio e lasciarlo ricadere rapidamente, poichè in tal modo la superficie del mercurio giunge alla posizione dell'equilibrio sempre allo stesso modo ed assume la stessa forma; è utile tuttavia ripetere varie volte l'osservazione.

In tal modo l'aria rinchiusa nel volumenometro ha preso il volume $V + U$ e la pressione $H - h$, se U è il volume occupato dall'aria nella bolla ed h l'altezza della colonna di mercurio data dalla posizione del livello del pozzetto sulla divisione del tubo.

Il volume V e l'altezza h sono limitati con grandissima esattezza dal mercurio affiorante all'astina; se si fa affiorare esattamente sul mercurio di una bacinella l'estremità inferiore della vite d'uno sferometro, si osserva che l'innalzamento o l'abbassamento di questa di 0,01 mm. è sufficiente per produrre sulla superficie del mercurio una sporgenza o una cavità visibilissime senza nessun artifizio o mezzo d'ingrandimento.

Per leggere facilmente la posizione esatta del livello del mercurio del pozzetto evitando gli errori che possono derivare dai riflessi e dalla indefinitezza della sua immagine, ho collocato sulla superficie del mercurio perpendicolarmente alla visuale un filo di smalto azzurro, tirato alla lampada, lungo circa 3 cm., di 0,2 mm. di diametro, appoggiandolo contro il tubo graduato dimodochè fosse anche evitato l'errore di parallasse, ed il filo e le divisioni del tubo apparissero contemporaneamente nette nel campo del

cannocchiale di lettura; m'è parso del tutto trascurabile lo spessore di cui il filo s'immergeva, che potrebbe facilmente esser determinato esattamente collo sferometro.

Si ha così nel modo solito dalla legge di Boyle:

$$VH = (V + U)(H - h)$$

donde si ricava:

$$(1) \qquad V = U\frac{H-h}{h},\ U = \frac{h}{H-h}V,\ h = \frac{U}{V+U}H$$

Siccome V può essere determinato con grandissima esattezza pesando il mercurio che può riempire l'imbuto ed il tubo capillare, dalla (1) noto h si può ricavare U; è utile talvolta conoscere l'altezza h della colonna quando siano noti U, V.

Similmente se si ripetono le stesse operazioni dopo aver collocato nell'imbuto un corpo di volume ignoto in modo che lo spazio libero nell'imbuto sia ridotto a V', se h' è l'altezza della colonna di mercurio nelle nuove condizioni, sarà $V' = U(H - h') : h'$, ed il volume cercato del corpo suddetto sarà:

$$(2) \qquad V - V' = V - U\frac{H-h'}{h'}$$

Siccome U è costante al pari di V, non è indispensabile ripetere la sua determinazione per ogni corpo di cui si cerca il volume, e può bastare di determinarlo una volta per sempre e solo ripetere la sua determinazione quando si creda opportuna una verifica, tuttavia è preferibile eseguire le determinazioni di h ed h' una dopo l'altra e anche più volte alternandole, poichè essendo le due determinazioni simili è probabile che anche gli errori inevitabili siano poco diversi e si compensino nel risultato finale. In questo caso si ha pel volume cercato:

$$(3) \qquad V - V' = U\,H\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h'}\right) = V\frac{H(h-h')}{(H-h')h}$$

Il primo di questi valori è semplice e simmetrico ma non è conveniente per il calcolo perchè U non è dato immediatamente dalle determinazioni, mentre invece il secondo valore, contiene solo, oltre V, i dati immediati delle medesime, e richiede un minimo di operazioni aritmetiche eseguibili coll'aiuto dei logaritmi.

È utile ricercare quali sono le dimensioni relative da darsi al volumenometro per far sì che gli errori inevitabili abbiano la minor influenza possibile sul valore cercato del volume di un corpo. Se supponiamo che nelle

determinazioni di V, di H e di h si siano commessi gli errori affatto indipendenti $\pm dV$, $\pm dH$, $\pm dh$, che essendo molto piccoli potranno essere considerati come infinitesimi, ne risulta nel valore di U un errore dU che si potrà ricavare differenziando la (1). Si ha così:

$$dV = \frac{H-h}{h}\,dU + \frac{U}{h}\,dH - \frac{HU}{h^2}\,dh$$

ossia dividendo per V e pel suo valore e supponendo il caso più sfavorevole che gli errori vengano a sommarsi nel valore di dU si ha:

$$\frac{dU}{U} = \frac{dV}{V} + \frac{dH}{H-h} + \frac{H\,dh}{(H-h)h}$$

Similmente si ottiene:

$$\frac{dV'}{V'} = \frac{dU}{U} + \frac{dH}{H-h'} + \frac{H\,dh'}{(H-h')h'}$$

$$\frac{dV'}{V'} = \frac{dV}{V} + \left(\frac{1}{H-h} - \frac{1}{H-h'}\right)dH + H\left(\frac{dh}{(H-h)h} + \frac{dh'}{(H-h')h'}\right)$$

e supponendo trascurabili il primo termine ed il secondo, perchè la determinazione di V mediante pesata del mercurio è molto esatta, e perchè l'errore unico e non grande nella determinazione della pressione atmosferica agisce quasi ugualmente in entrambe le determinazioni di U e di V′ e l'errore risultante è piccolissimo, si ha:

$$\frac{dx}{x} = \frac{V'}{x}\left(\frac{dh}{(H-h)h} + \frac{dh'}{(H-h')h'}\right)H$$

ponendo $V - V' = x$.

Sono quindi condizioni favorevoli per l'esattezza della determinazione di x: che x sia grande, che V′ sia piccolo e che il fattore fra parentesi sia minimo. Le due frazioni che lo compongono sono minime rispettivamente se $h = H - h = H:2$, ed $h' = H - h' = H:2$, condizioni che non possono esser soddisfatte contemporaneamente, mentre la somma sarà minima se $h + h' = H$, ossia h ed h' sono equidistanti, l'una in meno l'altra in più, da $H:2$. È da notare che il prodotto $(H - h)h$ varia poco quando h varia senza discostarsi troppo da $H:2$, e lo stesso avverrà quindi per $dx:x$.

Quindi è utile per la determinazione di U che sia $h = \frac{1}{2}H$, ossia che la capacità della bolla sia uguale a quella dell'imbuto vuoto, per la determinazione di V′ invece che la capacità della bolla sia uguale a quella di V′, e per il complesso delle due determinazioni sarà utile che la capacità della bolla sia compresa fra quella dell'imbuto vuoto, e questa stessa diminuita del volume ignoto.

Allo stesso risultato si giunge più semplicemente osservando che se la bolla avesse una capacità infinita, oppure nulla, il volumenometro non accu-

serebbe affatto le variazioni di V, perchè nel primo caso sarebbe sempre $h = H$, nel secondo $h = 0$ comunque variasse, restando finita, la capacità dell'imbuto.

Un modo d'operare assai vantaggioso per l'esattezza è quello di eseguire due determinazioni; una collocando entro l'imbuto il corpo di cui si cerca il volume x, l'altra collocandovi invece un corpo di volume noto u all'incirca uguale o poco diverso da x. Se h' ed h'' sono le altezze delle colonne di mercurio dopo ottenuto l'affioramento nei due casi rispettivamente, sarà:

$$V - x = U(H - h') : h' \quad , \quad V - u = U(H - h'') : h''$$

ossia:

$$x = u + UH\left(\frac{1}{h''} - \frac{1}{h'}\right) = u + (V - u)\frac{H(h' - h'')}{(H - h'')h'}$$

È utile anche che la capacità libera dell'imbuto sia in entrambi i casi piccola, quindi se il volume ignoto è piccolo, si aggiungano nell'imbuto altri corpi di volume noto.

In tal modo si ottiene che V' sia piccolo; inoltre sarà possibile ottenere che tanto h' quanto h'' siano poco diversi da $\frac{1}{2}H$, dando alla bolla una capacità poco diversa da quella libera dell'imbuto che è all'incirca la stessa in entrambe le determinazioni; finalmente è probabile che essendo h' ed h'' quasi uguali, anche dh' e dh'' risultino quasi uguali e si distruggano, tutte condizioni favorevoli per rendere piccolo l'errore relativo $dx : x$.

Questo modo d'operare corrisponde a quello per sostituzione che si usa spesso nelle pesate, e volendo usarlo converrà preparare una serie di volumi noti p. es. 1, 2, 2, 5 ecc. cm^3 determinati idrostaticamente colla massima esattezza; però a causa della durata delle determinazioni non si potrà spingere la sostituzione fino all'uguaglianza.

Un altro modo di operare analogo al precedente, è quello di sostituire progressivamente al corpo di volume ignoto tanto mercurio finchè sia $h'' = h'$ e quindi $x = u$. A tale scopo bisognerebbe sostituire al corpo di volume ignoto una bacinella o tubetto pesato per ricevere il mercurio, ed inoltre il disco otturatore dovrebbe portare saldato nel mezzo una pipetta con robinetto contenente il mercurio.

Quando h'' si fa uguale o poco diverso da h', il profondo pozzetto in cui s'immerge il tubo del volumenometro non serve ad altro che a riempire quest'ultimo di mercurio; si può ottenere lo stesso scopo collocando alla sommità di esso tubo, sotto la bolla, un robinetto a tre vie la cui terza via laterale comunichi, mediante un tubo di gomma o di vetro, con un imbuto un po' più alto della bolla per mezzo del quale sia questa che il tubo sottostante possano esser ripieni di mercurio; in tal caso non è necessario il

pozzetto profondo, basta una piccola provetta o bacinella. Si potrebbe altresì utilizzare questo secondo imbuto munendolo d'una bolla sottostante per rendere l'apparecchio differenziale, in un imbuto andrebbe collocato il corpo di volume ignoto, nell'altro imbuto affatto identico un corpo di volume noto poco diverso.

Volumenometri a peso. — Rüdorff (Wied. Ann.) ha adottato nel suo volumenometro un modo diretto molto esatto per misurare U, l'aumento di volume che si fa subire all'aria, poichè egli produce quest'aumento lasciando effluire dall'apparecchio una quantità conveniente di mercurio che viene pesata. L'applicazione di questo processo però non è completa, perchè la diminuzione di pressione viene misurata mediante un manometro ad aria libera a mercurio e gli spostamenti non piccoli del mercurio nei tubi non capillari del manometro producono anch'essi una variazione di volume dell'aria che dev'essere osservata direttamente, come potrebbe farsi in qualsiasi volumenometro e con precisione certo inferiore a quella ottenuta colla pesata del mercurio effluito.

Col volumenometro rappresentato nella figura, solo leggermente modificato, si può produrre l'intero aumento di volume dell'aria mediante efflusso di mercurio che pesato ci darà questo aumento di volume con grandissima esattezza, si può inoltre con metodo analogo determinare la variazione della pressione.

Per ottenere ciò, all'estremità inferiore del suddetto volumenometro è saldato un rubinetto semplice, il cui tubo d'efflusso sia corto, capillare, graduato in mm^3 di capacità, e porti fissata stabilmente una punta d'affioramento che termini poco sopra il livello dell'orifizio; il pozzetto è sostituito da una bacinella vuota e pesata; la scala è ascendente ed ha lo zero all'estremità della punta d'affioramento, la bolla è interamente cilindrica, lunga parecchi centimetri, di circa 2 cm. o più di diametro, esattamente calibrata.

Per determinare il volume di un corpo, si riempie il volumenometro di mercurio sino ad un segno di ritrovo nel tubo capillare fra l'imbuto e la bolla, avendo cura che non rimangano bolle d'aria, e che il foro del robinetto ed il tubo d'efflusso siano interamente pieni di mercurio. Essendo il robinetto chiuso, si colloca il corpo nell'imbuto; questo si chiude nel modo solito, e si apre il rubinetto sotto al quale si è collocata quasi a contatto la bacinella, nella quale si riceve il mercurio; quando l'efflusso è terminato, si regola l'altezza della bacinella, o meglio quella del volumenometro nel modo sopra indicato, in modo che il mercurio della bacinella arrivi esattamente alla punta d'affioramento. Si legge la posizione del livello superiore del mercurio nella parte cilindrica della bolla, si chiude il rubinetto e si pesa il mercurio. Si ha allora $VH = (V + U)(H - h)$ dove V ed U sono determinati con grandissima esattezza pesando il mercurio che può riempire l'imbuto ed il tubo capillare sopra al segno e quello effluito nella bacinella, ed

h è noto dalla lettura diretta, ma potrebbe esser dedotto con grandissima esattezza dal peso del mercurio effluito se la bolla è stata esattamente calibrata.

Se il volume del corpo fosse troppo piccolo, il livello del mercurio potrebbe scendere al disotto della bolla, e l'errore di capillarità sarebbe molto grande; si evita ciò senza ricorrere a bolle molto lunghe, aggiungendo al corpo nell'imbuto un corpo di volume noto e conveniente.

Anche con questo volumenometro è utile di eseguire una determinazione di confronto, collocando nell'imbuto un corpo di volume interamente noto quasi uguale a quello da determinare, o ciò che torna lo stesso, di determinare il volume ignoto per sostituzione, perchè si eliminano così gli errori sistematici, quali p. es. quelli dovuti a deviazioni dalla legge di Boyle, allo strato d'aria che rimane nella bolla fra vetro e mercurio, ad errori della scala o della calibrazione

È necessario che la bolla cilindrica abbia un diametro piuttosto grande, sebbene ciò diminuisca la sensibilità, affinchè l'errore di capillarità sia piccolo o almeno possa considerarsi come costante nelle due determinazioni suddette.

Nel togliere la bacinella di sotto al robinetto, il mercurio non si separa sempre nello stesso punto del tubo d'efflusso, ma se questo è calibrato, si potrà dedurre o aggiungere al peso del mercurio quello occorrente per ridurre l'estremità della colonnetta di mercurio sempre allo stesso punto.

Finalmente è forse utile notare che si può determinare il volume d'un corpo collocandolo entro una larga e corta campanella provvista d'uncino in cima, che s'immerge completamente in un liquido e si pesa a due diverse profondità, possibilmente molto diverse.

Difatti se P è il peso della campanella nell'aria, P′ quello del corpo, p e p' i pesi apparenti della campanella col corpo nel liquido, di densità d, alle profondità a ed a', ove le pressioni saranno $h = ad : 13{,}6$, $h' = a'd : 13{,}6$ oltre a quella atmosferica, x il volume cercato del corpo, U ed U′ i volumi dell'aria alle profondità suddette, u il volume delle pareti della campanella compresa la zavorra ecc. si avrà:

$$p = \mathrm{P} + \mathrm{P}' - (x + u + \mathrm{U})d \,,\; x + u + \mathrm{U} = \frac{\mathrm{P} + \mathrm{P}' - p}{d}$$

$$p' = \mathrm{P} + \mathrm{P}' - (x + u + \mathrm{U}')d \quad x + u + \mathrm{U}' = \frac{\mathrm{P} + \mathrm{P}' - p'}{d}$$

$$\mathrm{U}(\mathrm{H} + h) = \mathrm{U}'(\mathrm{H} + h')$$

donde eliminando U ed U′ si potrà ricavare x.

Nell'uso di questo metodo è da notare che un liquido ha solitamente temperature decrescenti coll'altezza; è utile perciò di aumentare la profondità della campanella non già immergendola di più, ma bensì versando altro liquido nel recipiente evitando di mescolarlo con quello sottostante.

Fisica terrestre. — *Misure pireliometriche eseguite a Sestola ed al Monte Cimone nell'estate del 1900.* Nota di CIRO CHISTONI, presentata dal Socio P. BLASERNA [1].

Nel 1900 le osservazioni pireliometriche a Sestola (lat. bor. 44°.14′; long. E da Gr. 10°.46′) si cominciarono il 19 luglio e si finirono il 28 agosto. Dal 19 luglio a tutto il 27 dello stesso mese si fece stazione nel prato annesso al R. Osservatorio meteorologico (1092 m. sul mare) e dal 27 luglio al 28 agosto si dovette, per necessità, trasportare la stazione nel prato di casa Costa (1020 m. sul mare).

A Sestola si adoprò l'attinometro di Violle di proprietà del R. Ufficio centrale di Meteorologia e Geodinamica del quale si fece uso sul Monte Cimone nel 1899 [2], munito di uno dei due termometri che servirono al Corleto nel 1898 [3] e precisamente di quello che ha il serbatoio più piccolo. I raggi solari si fecero costantemente passare per il foro dello schermaglio che ha il diametro di centimetri 1,138.

Sul monte Cimone (lat. bor. 44°.12′; long. E da Gr. 10°,42′; altezza sul livello del mare 2165 metri) si fece uso dell'attinometro, che servì poi nel 1901 [4] collo stesso termometro e collo stesso foro di entrata dei raggi solari. Per la stima del tempo, al Cimone servì il cronometro Parkinson e Frodsham n.° 1536 ed a Sestola il cronometro Crisp n.° 2919.

Il metodo di osservazione è stato sempre quello adottato per le misure fatte sul Monte Cimone nel 1901.

Come al solito, nelle tabelle che seguono è indicata con h l'altezza del Sole al momento dell'osservazione, con Q la quantità di calore (gr. calor. per minuto) inviata dal Sole normalmente sulla superficie di un centimetro quadrato, la quale abbia *uno* di potere assorbente; con B la pressione barometrica ridotta a 0° [5]; con t la temperatura dell'aria, con f la forza elastica del vapore acqueo esistente nell'atmosfera e con u la umidità relativa.

Lo stato del cielo, in ispecie sul Monte Cimone, è stato poco favorevole per le osservazioni pireliometriche e perciò nel 1900 non si potè eseguire che uno scarso numero di misure.

(1) Presentata nella seduta del 6 dicembre 1903.

(2) Veggasi la Nota: *Misure pireliometriche eseguite a Sestola ed al Monte Cimone nell'estate 1899.* (Rend. della R. Accad. dei Lincei vol. XII, s. 5ª, 1° sem. 1903, p. 258-263).

(3) *Misure pireliometriche eseguite al Corleto nell'estate del 1898* (Rend. della R. Accad. dei Lincei vol. XII, serie 5ª, 1° sem. 1903, pag. 53-57)

(4) *Misure pireliometriche fatte sul Monte Cimone nell'estate del 1901* (Rend. della R. Acc. dei Lincei vol. XI, serie 5ª, 1° sem. 1902, pag. 479-486 e 539-541).

(5) Volendo ridurre la pressione barometrica alla latitudine di 45° ed a livello del mare, bisogna applicare la correzione di — 0,19 millimetri per Sestola e di — 0,29 millimetri per il Monte Cimone.

SESTOLA 1900.

Giorno	*h*	Q	B	*t*	*f*	*u*	*Annotazioni*
19 luglio	56,0	1,108	674,0	22,2	11,9	58	⊙ libero; Cu sparsi
»	63,6	1,203	674,0	23,3	12,3	56	Id.
20 »	48,4	1,242	674,9	21,5	12,3	63	Cielo bellissimo
»	55,9	1,161	675,0	22,5	12,9	62	Cielo un po' caliginoso
»	63,4	0,714	675,0	23,0	13,1	61	Caligine
»	66,5	1,157	675,1	23,7	13,2	59	Bel cielo
21 »	41,5	1,119	676,0	22,0	12,5	62	Id.
»	55,0	0,780	676,1	22,4	12,4	60	Caliginoso
22 »	40,2	1,174	674,1	21,5	11,1	56	Bellissimo cielo
»	45,9	1,149	674,2	21,5	11,5	58	Qualche velo
»	55,4	1,266	674,1	21,7	10,3	51	⊙ libero. Cu sparsi
»	61,0	1,184	674,1	22,9	11,4	53	Qualche velo; Cu sparsi
»	64,0	1,237	674,1	20,7	9,7	51	⊙ libero; Cu sparsi
»	66,1	1,100	674,0	19,4	8,8	50	⊙ con aureola; Cu sparsi e veli
23 »	47,0	1,090	669,9	21,9	10,5	52	Cu sparsi; ⊙ libero
25 »	46,2	1,095	673,6	20,9	9,8	51	Bellissimo cielo
»	58,4	1,174	673,8	21,4	9,9	50	Id.
»	62,5	1,215	673,9	21,8	10,0	49	Id.
»	65,5	1,283	673,9	22,5	10,6	50	Id.
26 »	46,3	1,209	673,8	21,5	12,8	65	Id.
»	54,9	1,352	674,0	23,5	12,7	57	Un pò' di caligine all'orizzonte
27 »	48,2	1,243	672,5	23,0	10,7	49	⊙ libero; bel cielo
»	54,7	1,284	672,8	23,5	13,2	59	⊙ libero; un pò' di caligine all'orizzonte
»	65,1	1,277	672,9	24,9	13,1	54	⊙ libero; qualche Cu
28 »	61,9	1,231	678,8	24,5	11,7	49	Sereno
»	64,9	1,208	678,5	25,5	11,9	47	Sereno
»	61,9	0,980	678,3	24,8	11,2	46	Caliginoso
1 agosto	33,9	1,212	679,3	19,2	10,0	58	Sereno
»	44,3	1,305	679,3	19,4	8,8	50	Id.
»	53,8	1,321	679,3	20,3	9,5	51	Id.
»	61,1	1,283	678,2	20,6	8,9	47	Id.
»	63,9	1,323	678,2	21,4	8,4	42	⊙ libero; fra densi cumuli
2 »	33,7	1,042	677,7	20,6	8,8	46	Sereno
»	44,1	1,275	677,5	20,5	8,6	45	Sereno
»	56,6	1,206	677,3	21,1	8,7	44	Un pò' di caligine
»	60,8	1,251	677,3	21,5	10,0	50	Sereno
»	63,7	1,009	677,0	22,4	10,2	48	Veli intorno al ⊙
»	44,1	1,183	676,5	22,8	10,0	46	Cielo bianchiccio e Cu sparsi
3 »	33,6	1,182	675,6	19,8	9,1	51	Sereno
»	41,0	1,149	675,4	20,5	10,2	55	Qualche velo intorno al ⊙

Sestola 1900.

Giorno	*h*	Q	B	*t*	*f*	*u*	*Annotazioni*
5 agosto	34.0	1,157	670,7	16,6	5,5	37	⊙ fra i Cu; qualche velo
»	53,0	1,234	671,2	19,0	8,1	48	⊙ chiaro fra Cu
7 »	52,5	1,338	677,9	18,8	8,4	50	⊙ chiaro fra Cu
»	59,6	1,286	677,9	19,5	10,1	58	Id. qualche velo
10 »	21,6	1,080	677,8	17,9	9,8	62	Veli intorno al ⊙
»	32,3	1,186	677,9	18,4	9,8	60	⊙ circondato da aureola bianca
»	42,6	1,251	678,0	18,9	9,7	58	Id.
»	51,8	1,234	678,5	19,4	11,2	65	Id.
11 »	58,5	1,337	678,4	17,0	9,2	61	Cu sparsi ⊙ libero
»	61,2	1,452	678,9	17,2	8,6	57	Id.
14 »	20,7	0,842	680,2	13,7	7,3	60	Veli intorno al ⊙
»	31,5	1,108	680,1	14,1	6,9	55	Id.
»	41,7	1,288	680,1	14,3	6,8	53	Id.
»	57,7	1,345	680,0	15,1	6,4	47	Sereno
»	41,7	1,229	678,7	17,3	5,7	36	Id.
17 »	30,8	1,048	677,5	16,7	11,0	77	Cu sparsi
»	41,0	1,227	677,7	17,0	11,8	81	Id.
19 »	56,9	1,185	679,1	17,2	9,6	65	Cu; qualche velo
»	58,7	1,260	678,5	17,8	9,5	61	Id.
20 »	40,3	1,233	677,9	17,0	10,3	70	Cu sparsi
»	49,3	1,302	677,8	16,5	9,6	67	Id.
»	55,9	1,320	677,6	17,6	9,2	60	Densi Cu all'orizzonte
22 »	30,5	1,081	674,9	18,6	8,9	54	⊙ con aureola biancastra
28 »	20,0	1,104	677,3	15,8	8,7	63	Sereno
»	31,0	1,298	677,6	16,0	8,7	62	Id.
»	39,8	1,176	677,7	16,5	8,7	60	Qualche Cu vagante
»	55,2	1,314	677,5	17,2	7,0	46	Id.
»	48,4	1,373	677,7	18,2	7,1	44	Id.

CIMONE 1900.

Giorno	*h*	Q	B	*t*	*f*	*u*	*Annotazioni*
1 agosto	34,5	1,377	590,7	10,4	3,9	39	⊙ fra Cu
»	44,3	1,434	591,0	11,5	4,0	39	Id.
»	53,8	1,382	591,3	12,4	5,1	50	Id.
»	61,0	1,207	591,6	12,4	7,0	55	Id.
2 »	33,7	1,331	589,7	11,6	7,6	70	Sereno; nebbia all'orizzonte
»	44,1	1,424	589,7	12,1	7,8	72	Id.
»	53,6	1,463	589,8	12,5	7,9	68	Id.
»	60,8	1,482	589,7	12,7	8,0	67	Id.
»	63,7	1,509	589,8	13,6	8,0	65	Id.
3 »	22,9	1,114	588,6	14,3	6,9	57	⊙ chiaro; mare di nebbia sulle Alpi apuane
7 »	52,5	1,409	590,2	11,7	8,1	79	⊙ chiaro fra Cu
10 »	21,6	1,014	590,1	11,2	3,6	36	Orizzonte nebbioso; qualche Ci
»	32,3	1,339	590,2	11,3	3,6	36	Id.
»	42,6	1,348	590,2	11,4	4,8	48	S all'orizzonte; Ci sparsi
»	51,8	1,397	590,3	11,6	5,5	55	Id. e Cu all'orizzonte
»	60,0	1,252	590,4	12,0	6,2	63	Id.
»	61,5	1,392	590,3	12,0	7,4	71	Id.
»	37,4	1,317	589,9	12,6	6,4	62	Grossi Cu all'orizzonte
17 »	20,2	1,163	590,6	5,5	4,2	62	S e nebbia all'orizzonte
»	31,0	1,156	590,7	6,2	3,8	53	Id. Cu verso E
»	41,5	1,350	590,8	7,6	3,4	46	Id. i Cu sono aumentati
19 »	58,7	1,016	589,9	7,6	5,1	68	Cielo nebbioso
20 »	19,5	1,199	589,7	7,0	4,2	49	Sereno
»	30,1	1,301	589,6	9,1	5,2	59	Id.
»	40,3	1,250	589,5	9,5	7,6	80	Cielo nebbioso
21 »	30,0	0,791	588,6	10,7	6,9	79	Vento forte da SSE e cielo nebbioso
»	40,1	1,049	589,2	9,3	6,4	71	Il cielo è un po' migliorato
»	50,3	0,992	589,3	9,8	6,9	71	Nebbioso
»	55,6	1,274	589,5	11,5	7,2	71	Cielo sereno
22 »	39,8	1,171	589,4	9,9	6,9	76	⊙ chiaro; orizzonte nebbioso
»	42,8	1,171	589,0	10,0	6,9	76	Vento forte di tramontana; cielo sereno
»	48,7	1,273	588,5	10,0	6,9	75	Id.
»	55,2	1,471	588,9	10,2	6,8	74	Id.
»	56,0	1,366	589,0	10,2	7,0	75	Id.
»	57,7	1,344	589,7	10,3	7,3	77	Id.

Storia della scienza. — *Di Nicolò Tartaglia: frammenti di nuove ricerche*. Nota dell'ing. V. Tonni-Bazza, presentata dal Socio V. Cerruti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica organica. — *Sopra l'acido veratroilformico ed il suo prodotto di riduzione* (1). Nota di L. Vanzetti, presentata dal Socio G. Koerner (2).

Nel corso di numerose ricerche, che, insieme al prof. Koerner, ho intrapreso da alcun tempo, intorno ai prodotti di scissione dell'olivile estratto dalla gomma di ulivo (3), s'è constatata la presenza di un acido appartenente alla serie protocatechica e fornito di carattere chetonico, il quale si forma, insieme ad acido veratrico ed ossalico, quando si ossidi in soluzione alcalina il dimetilolivile, prodotto di metilazione completa dell'olivile stesso. In vista del comportamento interessante di questa sostanza non ancor bene conosciuta ed avendone accumulata una certa quantità, dietro proposta del prof. Koerner stesso, io m'ero assunto l'incarico di studiare più da vicino i caratteri di essa e dei suoi sali, tentandone in pari tempo la riduzione.

Ora, in questa breve Nota, descriverò rapidamente il modo con cui l'acido fu separato ed identificato; seguirà poi la descrizione dei principali suoi caratteri, quelli dei suoi sali e del prodotto di riduzione; il quale, come era prevedibile, contiene nella molecola due atomi di idrogeno in più e risponde nella composizione e nel comportamento all'ossiacido corrispondente.

La ossidazione del dimetilolivile avveniva in un liquido alcalino per KOH in cui si versava goccia a goccia la soluzione diluita di $KMnO_4$ (2 $_0/^0$ ca.). La reazione ha luogo indifferentemente a caldo ed a freddo ed è rapida abbastanza.

Dalla miscela contenente i prodotti della ossidazione, dopo aver separato l'ossido manganico ed evaporato a piccolo volume, si mettevano in libertà gli acidi organici aggiungendo la quantità calcolata di acido cloridrico diluito, a caldo; si otteneva così cristallizzato l'acido veratrico, che per la sua poca solubilità si separa quasi completamente col raffreddamento. Dopo aver concentrata la soluzione salina rimanente, da cui si separa in grosse goccie oleose

(1) Lavoro eseguito nella R. Scuola Superiore di Agricoltura di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 6 dicembre 1903.

(3) Koerner e Vanzetti, Rendiconti della R. Accad. Lincei, vol. XII, serie 5ª, 1° sem. 1903, fasc. 4°.

una sostanza bruna solubilissima in etere, si estraeva ripetutamente con questo solvente e se ne ottenevano soluzioni che, evaporate a sciroppo, lasciavano presto cristallizzare in forme curiose, caratteristiche il nuovo composto; erano grossi mammelloni quasi bianchi, che talora assumevano la forma di ciambella, spaccandosi nel mezzo: alle prime prove risultò evidente il carattere acido e chetonico della sostanza.

Un metodo facile e comodo di purificazione, che separa anche le ultime tracce di acido veratrico e delle altre impurezze, consiste nella preparazione del composto bisolfitico. Per ciò si tratta la soluzione eterea della sostanza, a più riprese, con soluzione concentratissima di solfito monosodico recente, in eccesso; si lava la soluzione solfitica più volte con etere fino a che questo per evaporazione non lascia residuo, e poi si decompone con acido solforico diluito (1 : 5), favorendo lo svolgimento della anidride solforosa col praticare il vuoto mediante una pompa idraulica sopra la soluzione messa in recipiente a pareti resistenti. Già nella soluzione acquosa si separa una gran parte dell'acido chetonico in fiocchi bianchi; un'estrazione con etere fornisce la sostanza pura, che ora cristallizza facilmente in piccoli mammelloni bianchi lanuginosi costituiti da aghetti finissimi flessibili. Nell'acqua è meno solubile. Nel benzolo freddo quasi non si discioglie e dalle soluzioni bollenti per raffreddamento si depone in piccoli mammelloni; per evaporazione da benzolo umido si ottengono spesso tavole rombiche od esagonali, e lunghi prismi a base di esagono regolare, che tolti dalla soluzione diventano rapidamente opachi, perdendo solvente di cristallizzazione (1). La luce agisce su questo acido, colorandolo lentamente in bruno.

La sua identificazione non presentò alcuna difficoltà: d'altra parte esso è già stato ottenuto altra volta ossidando a caldo con $KMnO_4$ il metilengenolo (2) e l'isometilengenolo (3). Gli spetta la formola 3 : 4 $(CH_3O)_2 . C_6H_3 . CO . COOH$: è un acido chetonico della serie dimetossilprotocatechica: *acido veratroilformico* ratroilformico, o 3 : 4 dimetossilbenzoilcarbonico.

	trovato	calcolato p. $C_{10}H_{10}O_5$
C	57,00 %	57,14
H	5,07 »	4,76

Per fusione con alcali caustico, si converte in acido protocatechico. Per ossidazione con CrO_3 perde anidride carbonica e si trasforma in acido

(1) Non mi è mai accaduto, nonostante le numerosissime prove fatte, di ottenere questa forma di cristallizzazione adoperando benzolo perfettamente secco. Essendo, i cristalli in questione, sempre piccolissimi ed isolati, non fu possibile istituire un controllo per decidere in proposito; pare tuttavia, data la rapidità con cui i cristalli diventano opachi appena estratti dal liquido solvente, che si tratti di benzolo di cristallizzazione anzichè di acqua.

(2) Tiemann e Matsmoto (Berl. Ber. XI. 142, 1878).

(3) Ciamician e Silber (Berl. Ber. XXIII. 1165, 1890).

veratrico. L'ossidazione fu eseguita su 5 gr. di acido veratroilformico disciolti in 150 gr. di acido acetico gl., impiegando CrO_3 in lieve eccesso (teor. gr. 1,59 per 1 atomo di ossigeno). La reazione procede nel modo più semplice, se nella soluzione acetica bollente si versa goccia a goccia il CrO_3 disciolto in acido acetico diluito (1 : 1).

Lo svolgimento di CO_2 è regolare. Terminata la reazione, dopo alcune ore si evapora la soluzione previamente diluita con 500 cc. di acqua: per aggiunta di acido solforico si separa il sale di cromo, il quale trattato a più riprese con acqua bollente le abbandona l'acido nuovo formatosi. Operando con debite cautele il rendimento è quantitativo. Il prodotto dell'ossidazione, purificato per cristallizzazioni dall'acqua e sottoposto ad analisi, mostrò tutti i caratteri dell'acido veratrico. La reazione si può rappresentare schematicamente così:

$$3\ C_{10}H_{10}O_5 + 2\ CrO_3 = 3\ C_9H_{10}O_4 + Cr_2O_3 + 3\ CO_2.$$

L'acido veratroilformico ottenuto dal bisolfito sodico ha il massimo grado di purezza. A 138-9° fonde trasformandosi in un liquido denso bruno, che mantenuto per alcun tempo a temperature superiori ai 140° si fa sempre più scuro. Mentre il corrispondente composto monometilato (acido vanilloilformico), scaldato pochi gradi sopra il punto di fusione, si converte, secondo Tiemann (1), quasi completamente in vaniglina, mettendo in libertà CO_2, non si verifica con altrettanta facilità il fatto analogo per il nostro acido. Sono necessarie condizioni speciali perchè la decomposizione avvenga in quel senso: in generale però essa è più profonda e complessa e dà luogo a formazione di parecchie sostanze differenti. D'altra parte una vera decomposizione con svolgimento di anidride carbonica, non incomincia che sopra 200° ed allora distilla in gran parte una sostanza oleosa chiara, che cristallizza immediatamente in bellissime tavole rombiche, mentre resta indietro una massa densa bruna di odore aromatico complesso. Anche eseguendo la distillazione nel vuoto si arriva press'a poco allo stesso risultato. Se, terminato lo sviluppo di CO_2 sottoponeva la sostanza decomposta a distillazione in corrente di vapor d'acqua, ottenevo solo piccole quantità di prodotto giallastro oleoso, dotato di odore che lontanamente ricorda la vaniglina; in seno a questo liquido denso cristallizzava, dopo alcuni giorni, in lunghi aghi bianchi, una sostanza, che purificata, facendone il composto bisolfitico, fonde a 42° circa ed ha deciso odore vaniglico (*Metilvaniglina*, f.° 42-43°) (2).

Modificai a più riprese, in rapporto alla temperatura, la distillazione secca dell'acido chetonico; il risultato però rimase quasi sempre lo stesso. Solo potei verificare un miglior rendimento, quando la sostanza veniva portata rapidamente a temperatura elevata, in modo da provocare una immediata

(1) Berl. Ber XXIV. 2878.
(2) Berl. Ber. XI. 663.

decomposizione; mi fu dato così di ottenere cristallizzata in aghetti bianchi una quantità maggiore di metilvaniglina.

La sostanza che distilla e cristallizza subito in tavole rombiche e costituisce una buona parte del prodotto di decomposizione, fonde a 181-2° e non è altro che acido veratrico.

L'acido veratroilformico dà dei *sali* stabili e facilmente cristallizzabili. Il sale di ammoniaca ed i sali alcalini sono molto solubili in acqua, dalla cui soluzione sciropposa si depongono, come l'acido, in mammelloni grandi contorti di forma caratteristica: dall'alcool si possono ottenere in lucenti scagliette madreperlacee, o in aghi appiattiti.

Il *sale potassico* ottenuto per decomposizione del carbonato ed essiccato diede all'analisi:

K %	calcolato per $C_{10}H_9O_5K$
15,65	15,72

È stabile alla luce. Da esso, per doppia decomposizione, fu preparato il *Sale d'argento*: è bianco polveroso, appena precipitato; poi si colora in rosso sporco ed in bruno per azione della luce. È quasi insolubile nell'acqua fredda; meglio si discioglie a caldo e per raffreddamento si depone in lunghi aghi appiattiti, che a lungo andare imbruniscono alla luce. Anch'esso cristallizza dall'alcool in laminette lucenti.

Ag % trovato	calcolato per $C_{10}H_9O_5Ag$
34,02	34,07

Sale di bario. Se in una soluzione acquosa di sale potassico si versa del cloruro baritico, da principio non si forma precipitato, però in capo a pochi minuti, se la soluzione è sufficientemente concentrata, cristallizza in lunghi aghi setacei il veratroilformiato baritico, talora anzi la mescolanza si trasforma in un'unica massa costituita da sottilissimi aghi bianchi incrociati in tutti i sensi, e formanti una soffice trama nelle cui maglie resta trattenuto il liquido. La formazione degli aghetti è rapidissima e si può seguire il loro allungarsi osservando al microscopio. Molto più che a freddo questo sale si discioglie a caldo. È stabile alla luce.

Sale di piombo. L'acetato piombico provoca nelle soluzioni saline dell'acido veratroilformico, la formazione di un precipitato bianco, cristallino, non del tutto insolubile a freddo. Si discioglie nell'acqua bollente e da essa cristallizza in lunghi aghi, che alla luce ingialliscono un poco.

Sale di rame. Se si mescola, a freddo, la soluzione del sale potassico con una soluzione diluita di solfato ramico, il liquido rimane limpido ed assume una bella colorazione verde; solo dopo alcuni secondi incomincia a precipitare una pioggia di cristallini dicroici (giallo-verde), insolubili a freddo,

poco solubili a caldo. La forma predominante pare una bipiramide a base quadrata, cui spesso si unisce il prisma quadrangolare, specie se il cristallo si forma lentamente. Asciugati formano una polvere cristallina di un bel verde vellutato vivissimo. Messi in essiccatore, in cui si sia praticato il vuoto, perdono la loro lucentezza e diminuiscono di peso, perchè abbandonano l'acqua di cristallizzazione, che si trova nella quantità di cinque molecole per una di sale. L'essiccamento è completo in capo a tre giorni (I). Rapidamente avviene se si scalda in una stufa a 105° (II):

acqua trovata		calcolata per
I.	II.	$(C_{10}H_9O_5)_2Cu + 5H_2O$
15,22	15,74 %	15,78

I due campioni diedero poi rispettivamente:

Cu %		calcolato per
I.	II.	$(C_{10}H_9O_5)_2Cu + 5H_2O$
11,05	10,99	11,03

Scaldato sott'acqua si disidrata, convertendosi in fiocchi verde-sporco, che si trasformano poi in una massa cristallina verde-scuro costituita da laminette rettangolari:

Cu % trovato	calcolato per $(C_{10}H_9O_5)_2Cu$
13,16	13,10

Acido 3 : 4 *bimetossilmandelico.* L'acido veratroilformico sottoposto all'azione di idrogeno nascente, che si svolge da amalgama di sodio, addiziona due atomi di idrogeno. Si poteva prevedere *a priori* che l'idrogeno si sarebbe portato vicino all'ossigeno chetonico, dando luogo a formazione di un ossiacido. Il prodotto che ne risulta si può considerare come un acido glicolico, in cui un atomo di idrogeno vicino all'ossidrile è sostituito da un residuo aromatico che è due volte anisolo, sarebbe quindi, *acido biossimetilfenilglicolico*, o più semplicemente, considerandolo come derivato dall'acido fenilglicolico, potrà chiamarsi: *ac.* 3 : 4 *bimetossilmandelico*:

$$(OCH_3)_2 . C_6H_3 : CH(OH) . COOH,$$

5 gr. di acido veratroilformico sciolti in poca acqua, vennero addizionati poco a poco con 100 gr. di amalgama di sodio recente (2 1/2 %); si ebbe riguardo di neutralizzare l'alcali man mano che si formava, aggiungendo H_2SO_4 diluito; durante tutta l'operazione è necessario tenere il liquido in agitazione. A reazione finita il liquido separato dal mercurio fu neutralizzato con Na_2CO_3; si concentrò, e dopo aver acidificato con la quantità calcolata

di HCl, si estrasse con etere. L'estratto etereo fu trattato con soluzione di bisolfito alcalino concentrata per separare quel po' di acido chetonico che poteva eventualmente essere rimasto inalterato. La soluzione eterea, unita all'etere di lavaggio del bisolfito, evaporata e ripresa con acqua si convertì in sale sodico, il quale cristallizza bene dall'alcool concentrato. Così si ottenne abbastanza facilmente il prodotto puro. Il sale sodico decomposto con HCl cede all'etere l'acido nuovo, che val meglio ricristallizzare dal benzolo.

Dal benzolo bollente si ottiene in laminette cristalline, bianche, lucenti, che fondono a 105°. Sottoposto all'analisi diede:

		calcolato per $C_{10}H_{12}O_5$
C	56,25 %	56,60
H	5,70 »	5,66

È solubilissimo in etere ed in acqua e tra questi due solventi si divide; di modo che riesce lungo estrarre con etere le soluzioni acquose, se non si ricorre ad una saturazione con sali inerti. Il prodotto avuto per cristallizzazione dal benzolo è solubilissimo in acqua, con la quale può dare delle soluzioni quasi sciroppose, che però, dopo alcuni istanti lasciano deporre cristallini aghiformi, meno solubili, appartenenti verosimilmente ad un acido contenente acqua di cristallizzazione.

L'acido bimetossilmandelico lasciato a sè lungo tempo subisce l'azione della luce ed imbrunisce: tende inoltre a resinificarsi manifestando deciso odore vaniglico (metilvaniglina). È notevole il fatto che, mentre l'acido chetonico anche a temperatura elevata fornisce a mala pena piccole quantità del composto aldeidico, l'acido ridotto, che si può considerare come un acido lattico, subisce già a temperatura ordinaria una decomposizione, dando luogo a formazione di aldeide aromatica (1). La sua tendenza alla decomposizione è poi tanto più grande, quanto più elevata è la temperatura; e mentre i suoi sali sono stabili, l'acido per sè stesso, quando si tenta di purificarlo per successive dissoluzioni e cristallizzazione, va trasformandosi continuamente e dai prodotti di decomposizione si può anche ricavare della metilvaniglina.

I sali che questo acido fa coi metalli *alcalini*, sono solubilissimi nell'acqua e molto solubili anche in alcool diluito. Si possono invece ottenere ben cristallizzati da alcool molto concentrato: si è approfittato anzi di questo fatto per purificare l'acido dalle altre sostanze che l'inquinano; meglio si presta a questo scopo il sale sodico.

Anche il sale di *bario* è abbastanza solubile in acqua e si può ottenere cristallizzato in aghi sottili radialmente disposti.

(1) Anche l'acido parametossilmandelico, ottenuto saponificando la cianidrina dell'aldeide anisica, a lungo andare si resinifica, probabilmente perdendo acqua (vedi: Tiemann e Koehler, Berl. Ber. XIV. 1976).

Il sale di *argento*, ottenuto per doppia decomposizione, è pochissimo solubile in acqua fredda, più solubile in acqua calda, da cui si separa in cristallini bianchi aghiformi aggruppati a sfera. Alla luce imbrunisce dopo alcun tempo.

Gr. 0,1538 di sale d'Ag diedero gr. 0,0516 di Ag met.

corrisp.	calcolato per $C_{10}H_{11}AgO_5$
33,55 %	33,86

Anche da soluzioni diluite di sale potassico, si ottiene, per aggiunta di sale di rame, il *composto ramico*, in croste cristalline di colore verde-mela, che si depongono lentamente: è insolubile nell'acqua anche bollente.

Trattando la soluzione del sale alcalino con acetato di piombo, si ha subito un precipitato fioccoso, quasi gelatinoso, di *sale piombico*, il quale poco a poco si rapprende in croste, che sono affatto insolubili nell'acqua anche a caldo.

Si poteva prevedere che quest'acido, contenendo un atomo di carbonio asimmetrico, si potesse scindere, analogamente all'acido mandelico, nei due antipodi ottici. A parte la facilità con cui l'acido si decompone, la piccola quantità di sostanza ottenuta non mi permise di mettere in opera i mezzi opportuni per verificare questa proprietà.

Mi riservo di dare tra poco notizia intorno ad un *acido veratroilformico monobromurato*, ottenuto ossidando con $KMnO_4$ il dimetilolivile bibromurato e di descrivere brevemente un omologo dell'acido veratroilformico, in cui al posto di un ossimetile si trova un ossietile e che fu ottenuto ossidando nelle identiche condizioni il dietilolivile.

Chimica. — *Sull'acido platinico (esa-ossi-platinico)* [1]. Nota di Italo Bellucci, presentata dal Socio S. Cannizzaro [2].

È noto come, dopo le ricerche di Jörgensen [3], di Kohlrausch [4], di Hittorf e Salkowski [5] e di Miolati [6], sia stato provato nel modo più ampio che il cloruro platinico $PtCl^4$, combinandosi con due molecole di acqua, forma l'acido bibasico $[PtCl^4(OH)^2]H^2$, offrendo così un primo esempio ben netto di una specie di anidride metallica alogenata.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Roma.
(2) Presentata nella seduta del 6 dicembre 1903.
(3) Journ. prakt. Chemie [2]. *16*. 345, 1877.
(4) Wied. Annal. *63*. 423, 1897.
(5) Zeitschr. phys. Chemie *28*. 546, 1899.
(6) Zeitschr. anorg. Chemie *22*. 445, 1900.

In modo perfettamente analogo al tetracloruro di platino, è stato poi dimostrato che si comportano il tetrabromuro $PtBr^4$ (1), ed il tetraioduro PtJ^4 (2), i quali rispettivamente combinandosi con l'acqua dànno origine agli acidi $[PtBr^4(OH)^2]H^2$ e $[PtJ^4(OH)^2]H^2$.

Il Miolati (loc. cit.) basandosi sull'accennato comportamento del cloruro platinico di fronte all'acqua, ed in parte sull'esistenza sconnessa di alcuni composti clorurati del platino, di costituzione incerta e male interpretata, intuì ed ammise come probabile l'esistenza di una serie completa di acidi che partendo dall'acido esacloroplatinico $[PtCl^6]H^2$ giungesse fino al platinico $[Pt(OH)^6]H^2$ per graduale sostituzione degli atomi di cloro del primo con altrettanti ossidrili; serie che qui trovasi rappresentata:

$$[PtCl^6]H^2 \ , \ [PtCl^5(OH)]H^2 \ , \ [PtCl^4(OH)^2]H^2 \ ,$$
$$[PtCl^3(OH)^3]H^2 \ , \ [PtCl^2(OH)^4]H^2 \ , \ [PtCl(OH)^5]H^2$$
$$[Pt(OH)^6]H^2.$$

Da allora ad oggi tale serie di acidi si è andata a poco a poco completando, e si è riusciti a dimostrare sperimentalmente l'esistenza di quasi tutti i termini previsti. Lasciando in disparte l'acido esocloroplatinico $[PtCl^6]H^2$, noto da così gran tempo, alla identificazione dell'acido tetracloroplatinico $[PtCl^4(OH)^2]H^2$, seguì quella del pentacloroplatinico $[PtCl^5(OH)]H^2$ (3), quindi quella del monocloroplatinico $[PtCl(OH)^5]H^2$ (4), e successivamente quella recentissima del bicloroplatinico $[PtCl^2(OH)^4]H^2$ (5). A completare sperimentalmente questa serie di acidi non mancavano quindi, come vedesi, che l'acido tricloroplatinico $[PtCl^3(OH)^3]H^2$ e l'ultimo termine, l'acido platinico $[Pt(OH)^6]H^2$.

Nello intendimento di portare ancora un nuovo contributo alla conoscenza ed al completamento di questa serie di acidi, ho creduto opportuno rivolgere la mia attenzione ad uno dei due termini ancora sconosciuti e precisamente all'acido esa-ossi-platinico $[Pt(OH)^6]H^2$, trovandosi questo in molto stretto rapporto, specie per il modo di genesi, con il termine immediatamente superiore della serie, vale a dire con l'acido monocloroplatinico $[PtCl(OH)^5]H^2$, da me recentemente identificato (loc. cit.).

Ed ho rivolto la mia attenzione a questo ultimo termine, non più clorurato, anche con la speranza di portare un po' di luce nel campo dei platinati, intorno ai quali, sino ad oggi, non esistono che notizie ben rare ed incerte.

(1) Miolati e Bellucci, Zeitschr. anorg. Chemie *26*. 222, 1901.
(2) Bellucci, Gazz. Chim. Ital. *33*, 147, 1903.
(3) Miolati e Bellucci, Zeitschr. anorg. Chemie *26*. 209, 1901.
(4) Bellucci, Gazz. Chim. Ital. *33*. 134, 1903.
(5) Miolati e Pendini, Zeitschr. anorg. Chemie *33*. 254, 1903.

Prendendo in esame il composto $PtO^2,4H^2O$ che è l'idrato di biossido di platino fin qui meglio conosciuto con sicurezza, ho potuto dimostrare che ad esso spetta la costituzione dell'acido bibasico $[Pt(OH)^6]H^2$:

$$PtO^2 , 4H^2O = [Pt(OH)^6]H^2$$

cioè esso rappresenta l'ultimo termine non più clorurato della serie sovra riportata di acidi cloroplatinici.

Nella presente Nota, di indole preliminare, riferisco in succinto i risultati da me finora ottenuti in proposito.

L'idrato $PtO^2 , 4H^2O$ fu per la prima volta preparato dal Frémy (1). Questi, in analogia con ciò che aveva fatto per l'acido cloroaurico onde ottenerne l'acido aurico, riscaldò all'ebollizione l'acido cloroplatinico $PtCl^6H^2$ con eccesso di idrato sodico.

Saturando questo miscuglio con acido acetico ottenne un precipitato fioccoso, bianco, leggermente giallastro che egli non analizzò, ma caratterizzò per un ossido idrato del platino. Più tardi Topsöe (2) ripreparò nelle stesse condizioni tale idrato ed analizzandolo gli assegnò la formola $PtO^2 , 4H^2O$.

Io ho ripreparato anzitutto tale idrato, secondo il metodo indicato da Frémy. Esso, allo stato di secchezza, è una polvere bianca, debolmente giallastra, insolubile in acqua. Esposta alla luce va acquistando alla superficie un colorito bruno.

Le analisi, qui sotto riportate, fatte da me su tale composto, mantenuto su cloruro di calcio fino a costanza di peso, comprovano che ad esso spetta veramente la formola $PtO^2 , 4H^2O$.

I. Gram. 0,4686 di sostanza, calcinati lasciarono per residuo gram. 0,3044 di platino.

II. Gram. 0,5021 di sostanza, calcinati, in corrente di aria secca, dettero gram. 0,1235 di acqua e lasciarono per risiduo gram. 0,3575 di platino.

Riferendosi a 100 p. di sostanza, si ha:

	trovato		trovato da Topsöe		
	I.	II.	I.	II.	calcolato per $PtO^2 , 4H^2O$
Pt	64,96	64,77	65,7	64,9	65,20
H^2O	—	24,60	—	—	24,12

Scaldato a 100° fino a costanza di peso, questo idrato assume un colorito ruggine e, come aveva trovato Topsöe, perde soltanto due molecole di acqua trasformandosi in $PtO^2 , 2H^2O$. Ho infatti ottenuto i seguenti dati:

(1) Ann. de chim. et phys. [3] *31*. 482, 1851.

(2) Berichte 1870, 462.

I. Gram. 1,3237 di sostanza, tenuti in istufa a 100°, fino a costanza di peso, diminuirono di gram. 0,1610.

II. Gram. 1,0912 di sostanza, id. id., diminuirono di gram. 0,1370.

Riferendosi a 100 p. di sostanza, si ha:

	trovato		trovato da Topsöe		
	I.	II.	I.	II.	calcolato per $PtO^2, 4H^2O$
$2H^2O$	12,17	12,55	11,4	12,7	12,06

Riscaldato più oltre l'idrato perde anche le altre due molecole di acqua, riducendosi a PtO^2.

L'idrato $PtO^2, 4H^2O$, in specie se preparato di recente ed ancora umido, si scioglie alla temperatura ordinaria con grande facilità nelle soluzioni acquose degli idrati di sodio e di potassio, colorandole in giallo. Evaporando con molta lentezza queste soluzioni, su bagno maria, in capsule di platino, fino ad incipiente cristallizzazione, si ottengono dei cristalli di un colore giallo-oro, tanto più netti quanti più fortemente alcalina è la soluzione donde prendono origine. Se l'evaporazione della soluzione si fa rapidamente, si ottiene soltanto un deposito finemente cristallino, quasi polveroso; ond' è che per ottenere dei cristalli sien pur piccoli, ma netti, è necessario il più delle volte fare parecchi tentativi.

Tanto il sale di sodio che di potassio sono discretamente solubili in acqua e vi si sciolgono con colorazione gialla; sono insolubili in alcool etilico.

Furon purificati lavandoli con poca acqua e ripetutamente agitandoli con alcool. Le analisi eseguite sui due sali, mantenuti su cloruro di calcio fino a costanza di peso, portano a considerarli come sali dell'acido $[Pt(OH)^6]H^2$, ammettere cioè per essi le formole $[Pt(OH)^6]Na^2$ e $[Pt(OH)^6]K^2$ e non le corrispondenti $PtO^3Na^2, 3H^2O$ e $PtO^3K^2, 3H^2O$. E ciò in base ai seguenti fatti:

1.° Questi sali non perdono nulla del loro peso, tenuti lungamente in istufa a 100°-110°; soltanto abbandonano tre molecole di acqua, provenienti dalla scomposizione dei sei ossidrili interni, qualora l'elevazione di temperatura si spinga molto al disopra di questo limite.

2.° Le soluzioni acquose dei due sali, trattate con soluzioni di acetato di argento e di acetato talloso, vengono da queste precipitate completamente: le soluzioni platiniche si decolorano e si formano i rispettivi sali, di argento e talloso, sotto forma di precipitati amorfi, voluminosi, di colorito bianco, debolmente giallastro. Questi precipitati corrispondono alla composizione $[Pt(OH)^6]Ag^2$ e $[Pt(OH)^6]Tl^2$ e non a quella PtO^3Ag^2, e PtO^3Tl^2, come sarebbe dovuto verificarsi qualora ai sali $[Pt(OH)^6]Na^2$ e $[Pt(OH)^6]K^2$ spettasse invece la composizione $PtO^3Na^2, 3H^2O$ e $PtO^3K^2, 3H^2O$.

I due sali di argento e talloso riscaldati a 100° non perdono nulla del loro peso, mentre riscaldati più oltre forniscono quantitativamente, per ogni

molecola di sale, tre molecole di acqua, derivanti anche esse dalla scomposizione dei sei ossidrili interni.

3.° Liberatesi da questi sali del tipo $[Pt(OH)^6]X^2$ le tre molecole di acqua, per un'elevazione per quanto è possibile minima di temperatura, i sali che rimangono del tipo PtO^3X^2 mantenuti a lungo in contatto con acqua, anche riscaldando, non si alterano affatto, nè mostrano di aver ripreso quelle tre molecole di acqua che pure prima avevano abbandonato, dimostrando che queste ultime non erano molecole di acqua di cristallizzazione.

4.° Tutti i sali, di potassio e di sodio, come di argento e talloso, trattati con acido acetico riprecipitano nuovamente l'acido $[Pt(OH)^6]H^2$ da cui derivano.

Esponendo alla luce solare diretta un miscuglio di soluzioni di acido cloroplatinico $PtCl^6H^2$ con forte eccesso di acque alcalino-terrose, ho potuto dimostrare recentemente (loc. cit.) che si perviene ai sali dell'acido monocloroplatinico $[PtCl(OH)^5]X''$, vale a dire l'idrato alcalino-terroso sostituisce con altrettanti ossidrili soltanto cinque dei sei atomi di cloro dell'acido esacloroplatinico. Esponendo invece alla luce solare diretta miscugli di acido cloroplatinico con forte eccesso di soluzioni di idrati alcalini (di sodio, di litio) ho potuto provare che si perviene invece ai sali del tipo $[Pt(OH)^6]X^2$, vale a dire, gli idrati alcalini, agendo più potentemente degli alcalino-terrosi, sostituiscono tutti sei gli atomi di cloro dell'acido $PtCl^6H^2$.

Acidificando con acido acetico questi ultimi miscugli, esposti soltanto per qualche ora alla luce solare diretta, ne precipita abbondantemente l'acido $[Pt(OH)^6]H^2$, od altrimenti evaporandoli su bagno-maria, forniscono delle masse cristalline giallastre che, convenientemente purificate, all'analisi quantitativa risultarono essere i sali dell'acido $[Pt(OH)^6]H^2$.

Questa analogia di comportamento tra gli idrati alcalini e gli alcalino-terrosi, di fronte all'acido cloroplatinico $PtCl^6H^2$, mi sembra porti di per sè sola una grande conferma alla costituzione dell'acido $[Pt(OH)^6]H^2$.

Riferisco qui i risultati ottenuti nell'analisi dei sali citati.

Sale di sodio $[Pt(OH)^6]Na^2$.

La sostanza venne calcinata in presenza di acido solforico: si pesò il residuo di platino e di solfato di sodio; si asportò quindi con acqua il solfato sodico, ripesando il residuo di platino. Il sale perde completamente le tre molecole di acqua di costituzione, ad una temperatura oscillante tra i 150°-170°.

I. Gram. 0,4528 di sostanza, calcinati in presenza di acido solforico, dettero gram. 0,4444 di $Pt + SO^4Na^2$ e gram. 0,2535 di platino.

II. Gram. 0,3734 di sostanza, trattati come sopra, lasciarono per residuo gram. 0,3653 di $Pt + SO^4Na^2$ e gram. 0,2102 di platino.

III. Gram. 0,3738 di sostanza, ridotti con acido acetico e magnesio in nastri, dettero gram. 0,2116 di platino.

IV. Gram. 0,8040 di sostanza, riscaldati su 150°-170°, fino a costanza di peso, persero gram. 0,1312 di acqua.

Riferendosi a 100 p. di sostanza, si ha:

	trovato				
	I.	II.	III.	IV.	calcolato per $[Pt(OH)^6]Na^2$
$Pt + SO^4Na^2$	97,66	97,82	—	—	98,25
Pt	53,98	56,29	56,61	—	56,80
Na	13,52	13,47	—	—	13,44
H^2O(150°-170°)	—	—	—	16,31	15,76

Sale di potassio $[Pt(OH)^6]K^2$

Si presenta in piccoli cristalli romboedrici, più belli e netti di quelli del sale sodico.

I metodi analitici furono identici a quelli per il sale sodico.

I. Gram. 0,4658 di sost. dettero gram. 0,4576 di $Pt + SO^4K^2$ e gram. 0,2396 di platino.

II. Gram. 0,4190 di sost. detttero gram. 0,4112 di $Pt + SO^4K^2$ e gram. 0,2146 di platino.

III. Gram. 0,4094, ridotti con nastro di magnesio ed acido acetico, su bagno maria, dettero gram. 0,2114 di platino.

IV. Gram. 0,7318 di sostanza, mantenuti in istufa tra 130°-150°, fino a costanza di peso, persero gram. 0,1112 di acqua.

Riferendosi a 100 p. di sostanza si ha:

	trovato				
	I.	II.	III.	IV.	calcolato per $[Pt(OH)^6]K^2$
$Pt + SO^4K^2$	98,22	98,15	—	—	98,40
Pt	51,45	51,22	51,62	—	51,93
K	21,01	21,07	—	—	20,87
H^2O	—	—	—	15,19	14,41

Sale di argento $[Pt(OH)^6]Ag^2$

Preparato aggiungendo alla soluzione acquosa del sale $[Pt(OH)^6]K^2$ una soluzione acquosa satura di acetato di argento. Seccato, ha l'aspetto di polvere bianca, lievemente colorata in giallo. Seccato a 100° fino a costanza di peso venne sottoposto all'analisi. Si riduceva una data quantità del sale in crogiuolo di Rose ed in corrente di idrogeno; si pesava il residuo di platino

e argento, residuo che poi bollito lungamente con acido solforico concentrato lasciava indietro il solo platino.

L'acqua si determinò calcinando la sostanza in corrente di aria secca e raccogliendola in tubi a cloruro di calcio.

I. Gram. 0,4934 di sostanza, ridotti in corrente di idrogeno, lasciaron per residuo gram. 0,3934 di $Pt + Ag^2$ e gram. 0,1896 di platino.

II. Gram. 0,4672 di sostanza, ridotti in corrente di idrogeno, dettero gram. 0,3728 di $Pt + Ag^2$ e gram. 0,1804 di platino.

III. Gram. 0,6306 di sostanza, calcinati in corrente di aria secca, fornirono gram. 0,5056 di $Pt + Ag^2$ a gr. 0,0702 di acqua.

Riferendosi a 100 parti di sostanza si ha:

	trovato			
	I.	II.	III.	calcolato per $[Pt(OH)^6]Ag^2$
$Pt + Ag^2$	79,72	79,79	80,18	80,10
Pt	38,44	38,61	—	38,00
Ag	41,31	41,18	—	42,10
H^2O	—	—	11,14	10,54

Sale di tallio $[Pt(OH)^6]Tl^2$

Si ottenne trattando la soluzione acquosa del sale $[Pt(OH)^6]K^2$ con soluzione acquosa di acetato talloso. La separazione del platino dal tallio fu effettuata scaldando la sostanza in corrente di acido cloridrico, raccogliendo opportunamente il cloruro di tallio che volatilizzava.

Si pesò il residuo di platino ed il tallio allo stato di ioduro talloso.

I. Gram. 0,5100 di sostanza dettero, così trattati, gram. 0,1418 di platino e gram. 0,4724 di ioduro talloso, pari a gram. 0,2914 di tallio.

II. Gram. 0,4966 di sostanza, id., dettero gram. 0,1388 di platino e gram. 0,4620 di ioduro talloso, pari a gram. 0,2850 di tallio.

Riferendosi a 100 p. di sostanza:

	trovato		
	I.	II.	calcolato per $[Pt(OH)^6]Tl^2$
Pt	27,81	27,96	27,63
Tl	57,13	57,38	57,90

Nel mentre mi riserbo di completare le mie ricerche intorno a tale tipo di platinati, in parallelo e contemporaneamente sto effettuandone altre nel campo degli stannati, in collaborazione con il sig. N. Parravano, laureando in chimica. È stato trovato dall'Engel (1) un idrato $SnO^2,4H^2O$ analogo al

(1) Comptes Rendus *125*. 651, 1897.

PtO^2, $4H^2O$. Le determinazioni cristallografiche fatte da me eseguire sul sale $[Pt(OH)^6]K^2$ renderebbero questo isomorfo con il sale $SnO^3K^2,3H^2O$, studiato cristallograficamente dal Marignac (1); entrambi questi sali cristallizzano in romboedri, ad angolo, il primo di 75°,6, il secondo di 74°,53-75°,5. Considerando l'isomorfismo che esiste tra clorostannati $SnCl^6X^2$ e cloroplatinati $PtCl^6X^2$ si è indotti a credère che anche al tipo SnO^3K^2, $3H^2O$ spetti con ogni probabilità la formola $[Sn(OH)^6]K^2$.

Mineralogia. — *La Greenockite nelle Miniere di Montevecchio.* Nota del prof. Domenico Lovisato, presentata dal Socio G. Strüver (2).

In Sardegna si da ordinariamente il nome di giacimenti calaminari non soltanto a quelli, che comprendono le vere calamine (silicati di zinco), ma anche ai giacimenti, che comprendono assieme alle calamine le smithsoniti (carbonati di zinco), quando non sieno anche di puri carbonati.

Questi giacimenti, che per lo più si presentano in lenti od ammassi, talora assai potenti, generalmente si trovano nei calcari così detti metalliferi, spesso anche interstratificati fra i suoi banchi. Ne viene che le ricerche di tali minerali di zinco si facciano dai pratici o dai ricercatori di miniere solo là dove compariscono quei calcari, abbandonandosi tutte le altre formazioni, che non li comprendono. Per costoro sembrerebbe quindi assai strano il ritrovamento di qualche lente od ammasso di calamina o di smithsonite in formazioni schistose, prive assolutamente di calcare e specialmente del calcare, così detto metallifero. Ma quando si pensi che molte calamine e molte smithsoniti son dovute alla alterazione delle blende (solfuri di zinco), non sembrerà niente affatto singolare la comparsa di depositi, così detti calaminari, anche in formazioni filoniane, mancanti non solo del calcare, così detto metallifero, ma anche di qualunque altra specie di calcare.

Una di tali lenti od ammassi è quella che fu trovata da un ventennio circa nella concessione Telle di Montevecchio. Su questa comparsa, che al mineralogista non offre nulla di strano, si legge una breve Relazione negli Annali di Agricoltura, Rivista del servizio minerario nel 1885 (3), che per l'interesse, che presenta per la presente Nota, mi permetto di riportare: « Degna di nota fu la scoperta delle calamine nelle sezione Telle, posta sui limiti della 2ª con la 3ª concessione. Con la traversa n. 1N. della galleria Telle 4ª si riconobbe nella regione del letto del filone secondario il predetto

(1) Oeuvres complètes, tom. I, 645.

(2) Presentata nella seduta del 6 dicembre 1903.

(3) Lavoro citato, pag. 152-3.

minerale, che si presentò con aspetto spugnoso di color bianco concordante in inclinazione col filone stesso e con una potenza di un metro circa. A levante della traversa predetta la calamina fu riconosciuta per circa 150 metri; ma nelle traverse n. 3 e n. 4 non venne più riconosciuta. A ponente poi essa fu riscontrata nell'avanzamento e nel pozzo n. 2; cioè lungo un percorso di circa 250 metri, come pure essa venne riscontrata per una lunghezza di 100 metri con l'avanzamento levante della galleria Amsicora, però non si hanno ancora sufficienti lavori per stabilire, se nei 300 metri interposti fra il predetto pozzo n. 2 e questo ultimo avanzamento il giacimento sia continuo o subisca interruzioni.

« Nel senso verticale fu riscontrata continuare superiormente alla predetta traversa ai livelli Telle 3ª e Telle 2ª ed in qualche tratto anche negli affioramenti del filone, sviluppandosi così su di un'altezza di circa 50 metri al di sopra del livello Telle 4ª. Inoltre coi lavori del gradino San Giorgio essa fu riconosciuta per altri 25 metri d'altezza al disotto della galleria Amsicora. L'aspetto spugnoso del minerale si riscontrò ancora nei livelli superiori a Telle 4ª; però nella Telle 2ª e più particolarmente nel gradino San Giorgio la calamina si presenta pure compatta e costituita in questo caso quasi completamente da carbonato di zinco, misto a poca siderite ed a poca silice libera.

« Benchè dai dati posseduti non sia possibile ancora pronunziarsi sull'entità di questo giacimento, pure, se si tien presente che esso fu riconosciuto con brevi interruzioni su di una lunghezza in direzione di circa un chilometro, se si considera che la qualità spugnosa del minerale contiene il 22 % di zinco, e che quella compatta raggiunge allo stato crudo il tenore del 45 %, si è condotti ad ammettere che il suo rinvenimento costituisce una scoperta importante che merita di essere largamente studiata ».

Anche in questa Relazione si confonde la calamina colla smithsonite, non avendo io trovato alle Telle mai il silicato, ma sempre il carbonato di zinco mescolato non solo con alquanto carbonato di ferro e poca silice libera, ma ancora con carbonato di manganese, come si può vedere dalla seguente analisi, che feci eseguire fino dal 1891 dal dott. Michelangelo Fasolo, allora mio assistente, sopra un campione di smithsonite spugnosa:

CO_3Zn	86,971
CO_3Fe	4,601
CO_3Mn	3,304
Ganga (argilla silicea)	5,027
H_2O (di costituzione)	0,040
	99,943

Dall'esame che ho potuto fare alla fine del giugno passato dell'abbondante materiale portato fuori dalle gallerie basse delle Telle ho potuto con-

vincermi che in tutto quell'abbassamento abbiamo un ammasso più o meno misto di carbonati di zinco, dovuti alla alterazione delle blende.

Questi carbonati presentano multiformi aspetti, passando dallo stato compattissimo a quello cariato, come fossero delle scorie, dal durissimo al quasi friabile, e dal colore bianco al rosso mattone e bruno con tinte anche azzurrognole, ed anche d'un bel verde in gruppi mammellonari cristallini. Qualche saggio qualitativo avrebbe dato per talune una mescolanza sensibile di carbonato di ferro.

Ora sopra queste smithsoniti, qualche volta sulla galena e più raramente sulla blenda si presenta una sostanza polverosa di tinta generalmente gialla, che un saggio qualitativo mi fece conoscere per *Greenockite*, cioè solfuro di cadmio, specie minerale nuova per la Sardegna e per quanto mi sappia per tutta Italia.

Però questa specie minerale, tanto rara in natura, non si presenta nell'isola nostra mai cristallizzata, ma semplicemente in croste e più spesso sotto l'aspetto di pigmento polveroso di color giallo aranciato o giallo cedro, qualche volta fino verdiccio sopra le smithsoniti, sopra le galene ancora e più raramente sulla blenda, proprio come si presenta in Francia, particolarmente nei dipartimenti dei Bassi ed Alti Pirenei, specialmente nelle miniere famose di Pierrefitte, senza dimenticare l'Ariège, l'Alta Garonna, la Dordogna e nel Rhône alla superficie della blenda cadmifera di Propières.

Presentandosi questa specie minerale nell'isola per lo più pulverulenta, raramente granulosa, ma sempre impura, si comprende come nulla possa dire per ora della durezza e del peso specifico, che per la sostanza cristallizzata sotto la forma di prismi esagoni, così caratteristici per la *Greenockite*, andrebbero rispettivamente da 3 a 3,5 e da 4,9 a 5; come non possiamo parlare di frattura, compattezza, lucentezza, trasparenza, sfaldatura, che sarebbero rispettivamente concoidale, fragile, adamantina-resinosa, trasparente o translucida e di facile sfaldatura. Però come ho già detto i caratteri chimici corrispondono a quelli della specie, non volatilizzando a nessuna temperatura, assumendo il nostro minerale nel tubo chiuso un colore rosso carmino, quando venga fortemente riscaldato, e riprendendo il colore primitivo giallo a freddo, dando vapori solforosi nel tubo aperto: inoltre sul carbone al fuoco di riduzione sola o con la soda la nostra sostanza dà un'aureola quasi come una specie di crosta bruna rossiccia, caratteristica del cadmio: è solubile nell'acido cloridrico con isviluppo d'idrogeno solforato; la è anche nell'acido nitrico e nel solforico, ma molto poco nell'ammoniaca: la soluzione ammoniacale con solfuro di ammonio da un precipitato giallo.

Con grande fatica ho potuto mettere assieme, grattando qualche crosta pulverulenta e raccogliendo un po' di polvere gialla, poco più di un decigrammo di questa sostanza, sulla quale il mio assistente, dott. Rimatori, ha

proceduto all'analisi, che gli avrebbe dato questi risultati:

SCd	66,13
CO_3Zn) CO_3Fe)	21,14
Ganga	8,48
H_2O e perdite	4,25
	100,00

Quando avrò i liquidi densi per la separazione del solfuro di cadmio puro, spero poter procedere ad altra analisi con risultati migliori dei presenti, che, se dicono trattarsi effettivamente di *Greenockite* nella polvere gialla, non soddisfano molto il mineralogista.

Questo solfuro di cadmio lo dobbiamo certamente alla riduzione delle blende cadmifere, e le blende sarde dal più al meno lo sono quasi tutte; però le più ricche in cadmio pare sieno proprio quelle di Montevecchio.

Infatti una di esse, proveniente dal cantiere Principe Tommaso, della concessione levante di Montevecchio, avrebbe dato al dott. Rimatori, che ne pubblicò l'analisi insieme ad altre in un'interessante Nota (1), nientemeno che 0,95 di cadmio, ed altre due, delle quali prossimamente in altra Nota farà la pubblicazione lo stesso Rimatori, avrebbero dato una percentuale di cadmio di 0,79 una blenda delle Telle, dove in maggior quantità ho trovato la *Greenockite*, e 0,76 altra blenda della concessione superiore Sanna.

Le blende cadmifere per un'ossidazione diretta, avvenuta per l'azione contemporanea dell'umidità e dell'ossigeno, si trasformarono in solfato, che essendo solubile può essere portato via, rimanendo il solfuro di cadmio, che ha resistito a questa trasformazione, ed ecco le velature polverose gialle sulla galena e talvolta, benchè rarissimamente, anche in qualche frammento di blenda rimasto. A Montevecchio poi e specialmente alle Telle, dove abbiamo visto tanta quantità di smithsoniti, è probabile che dei bicarbonati solubili abbiano determinato dalla soluzione del solfato di zinco formatosi la precipitazione del carbonato di zinco, ed il solfuro di cadmio, che non ha subìto alcuna trasformazione, è rimasto a coprire come pigmento polveroso le smithsoniti e più raramente la galena e talora anche la blenda.

I più ricchi esemplari con *Greenockite* sono quelli, che alle Telle derivano dal gradino S. Giorgio, n. 1 ponente.

Nella concessione superiore Sanna ho trovato in piccolissima quantità la *Greenockite*, più sulla galena che sulla blenda.

Anche a levante non manca questa specie minerale: infatti in piccola quantità l'avrei trovata a coprire con straterello giallo-verdiccio le lamine

(1) *La galena bismutifera di Rosas e blende di diverse località di Sardegna.* Rend. della R. Acc. dei Lincei. Roma, vol. XII, 1° sem. 1903, serie 5ª, fasc. 7°, pag. 267.

di sfaldatura di un campione di galena, nella quale vedesi qua e là qualche moschettina di blenda nel quarzo, che accompagna la stessa galena: ricorderò ancora che nel magazzino della stessa concessione vidi un campione di smithsonite, che mi fu garantito derivare dalla concessione in parola, coperto in parte da *Greenockite*.

La nostra specie minerale si presenta anche a Piccalinna, avendo io raccolti colà tre campioncini di galena ricoperti dal solfuro di cadmio, ed in un quarto vedesi una moschettina di blenda fra la galena ricoperta da un po' di *Greenockite*.

Fisiologia. — *Le variazioni dell'alcalinità del sangue sulla vetta del Monte Rosa* [1]. Nota del prof. G. Galeotti, presentata dal Socio A. Mosso [2].

Nell'esporre i risultati delle prime ricerche fatte sulla vetta del Monte Rosa, studiando le variazioni dei gas del sangue, Mosso e Marro, dopo aver dimostrato che l'anidride carbonica diminuisce nel sangue arterioso per azione dell'aria rarefatta, così concludono [3].

« Questa diminuzione è troppo forte perchè basti a spiegarla la maggior facilità con cui il vapore acqueo e conseguentemente l'anidride carbonica passano nell'aria dei polmoni per effetto della minor pressione. Deve esser succeduto un cambiamento chimico nel sangue, una diminuzione della sua alcalinità ».

Guidato da questo concetto, il prof. Mosso mi propose di fare alcune esperienze comparative sull'alcalinità del sangue di varî animali durante il loro soggiorno a Torino e nella Capanna Regina Margherita, ed io con piacere accettai di studiare questo argomento, che non solo ha una notevole importanza ematologica, ma può servire anche ad illuminarci sulle modificazioni che avvengono nella composizione dei liquidi nutritivi e nel ricambio in genere degli animali trasportati a grandi altezze.

Sebbene io non intenda far qui una minuta trattazione sull'alcalinità del sangue, che fu tema di lunghe discussioni, pure non posso esimermi dal considerare brevemente alcune questioni che si riferiscono al concetto di alcalinità e ai metodi che furon proposti per istudiare tale proprietà nel sangue.

(1) Lavoro eseguito nella quarta spedizione sul Monte Rosa, diretta dal prof. A. Mosso.

(2) Presentata nella seduta del 6 dicembre 1903.

(3) Mosso e Marro, *Le variazioni che succedono nei gas del sangue sulla vetta del Monte Rosa*. Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1903, fasc. 12.

Il concetto d'alcalinità è stato originariamente qualitativo, e si dice che un liquido è *alcalino* quando produce una variazione di tono in certe sostanze coloranti. Ma se si considera questo concetto nel valore quantitativo, si può parlare di alcalinità in due sensi ben diversi. O, riferendoci al fatto che tutte le proprietà che caratterizzano un liquido alcalino dipendono soltanto dagli OH-ioni in esso contenuti, misuriamo l'alcalinità dalla concentrazione degli OH-ioni (e questa definizione mi sembra la più razionale): ovvero, tenendo conto della proprietà di neutralizzare gli acidi, misuriamo l'alcalinità di un liquido dal numero degli H-ioni che da questo liquido sono fissati.

Per le misurazioni dell'alcalinità secondo il primo concetto non possiamo servirci che di metodi, i quali non abbiano a spostare l'equilibrio chimico nel liquido da esaminarsi; cioè che non si basino su reazioni a cui gli OH-ioni debbano partecipare. Questi metodi si fondano sopra apprezzamenti colorimetrici o, come di recente è stato trovato, sulla determinazione delle F. E. M. di certe pile a gas.

Per le misurazioni dell'alcalinità seguendo il secondo concetto ci serviamo di metodi volumetrici, che dànno la quantità di H-ioni fissati dal liquido alcalino, sia per la sua combinazione con HO-ioni già liberi, sia per processi più complessi, quali son quelli che dipendono dalla sostituzione di un sale non dissociabile idroliticamente ad un sale così dissociabile o dalla liberazione di CO^2 dai carbonati ecc.

Anche riguardo al sangue sono stati adoperati questi varî metodi ed alcuni autori, in questi ultimi tempi, (Höber, Fränkel) hanno voluto determinare la concentrazione degli OH-ioni nel sangue mediante metodi elettrochimici: si comprende subito l'importanza di queste ricerche se si pensa alle proprietà particolarissime inerenti agli OH-ioni e alle influenze che essi devono di necessità esercitare sui protoplasmi con cui vengono in contatto.

D'altra parte i metodi volumetrici sono i più in uso ed essi, come ho accennato, servono a determinare la capacità che ha il sangue di fissare gli H-ioni, sebbene questa capacità risulti da svariati fattori singolarmente indeterminabili.

Fra questi i principali sono i seguenti:

1°. La proprietà che hanno varie proteine di fissare gli acidi in certe proporzioni (Cohnheim, Bugarzky e Liebermann, Spiro e Pemsel).

2°. La quantità di sali idroliticamente dissociati.

3°. La quantità di carbonati dissociati o no.

Da ciò si vede che le determinazioni dell'alcalinità del sangue, fatte con metodi volumetrici, non possono aver alcun valore assoluto, cioè non possono porre direttamente in evidenza alcuna delle proprietà fisico-chimiche del sangue. Possono invece avere un valore comparativo ed indicarci se, in date condizioni, nel sangue di un animale sono avvenute certe modificazioni più o meno profonde.

I metodi volumetrici impiegati in tali ricerche sono numerosi e svariati, nè io intendo di qui ricordarli, poichè a tal proposito si possono consultare i lavori di Loewy, di Cohnstein, di Foderà e Ragona, di Ascoli ecc.

Il miglior metodo per comune consenso è quello di Zuntz Loewy, e appunto di esso io mi sono servito.

Il sangue, proveniente dalla cannula posta in un'arteria dell'animale, era raccolto entro un palloncino con collo lungo e graduato, contenente una quantità conosciuta di soluzione d'ossalato ammonico al 0.2 %. Poi prendevo 10 cc. di questa miscela e titolavo con soluzione $\frac{n}{25}$ di acido tartarico. Come indicatore mi son servito di cartoline di Lacmoide preparate da Merk. Esse erano abbastanza sensibili da concedermi di determinare fino a $\frac{1}{2}$ decimo di cc. la quantità di acido necessaria per ottenere il cangiamento di colore della cartina. Un errore di $\frac{1}{2}$ decimo di cc. di acido corrisponde per 1 cc. di sangue (tale era all'incirca la quantità contenuta in ogni determinazione di 10 cc. di miscela) a gr. 0,00008 di NaOH, cioè ad un errore di 8 unità nella terza cifra se ci riferiamo a 100 cc. di sangue. Come si vedrà, le variazioni nell'alcalinità da me osservate sono assai maggiori, talchè questi errori sono al tutto trascurabili.

Per ogni esperienza ho fatto tre determinazioni che in generale mi hanno dato risultati concordanti.

Gli animali adoperati furono conigli, cani e scimmie, e finalmente ho fatto anche due determinazioni su me stesso.

Per ragioni indipendenti dalla mia volontà non ho potuto fare in precedenza a Torino le determinazioni di controllo, ma ho dovuto in generale seguire l'ordine inverso; cioè ho fatto le prime determinazioni nella Capanna Regina Margherita, e più tardi, dopo circa 20 giorni da che gli animali erano stati riportati a Torino, ho fatto le altre che mi dovevano fornire i valori normali.

Il vitto degli animali, come risulta nella annessa descrizione delle esperienze, non ha molto variato. Solo la temperatura a cui gli animali si trovavano nei due luoghi di esperienza era molto diversa, poichè, mentre nella Capanna Regina Margherita oscillava tra parecchi gradi sotto zero a qualche grado sopra, a Torino, durante le mie esperienze, non scese mai di sotto ai 16°. Soltanto le scimmie furono tenute nella Capanna Regina Margherita sempre vicino alla stufa e perciò a temperatura abbastanza elevata.

Nelle due cagne che mi servirono a tali esperimenti feci ancora un'altra determinazione. Esse furono oggetto anche di altre esperienze a fine di studiare certe modificazioni della respirazione, allorchè si somministravano loro delle miscele d'aria e di H, ed io utilizzai questi animali e determinai la alcalinità sia in un campione di sangue preso prima della inalazione di H, sia in un campione preso dopochè l'animale aveva per un certo tempo respirato questo gas.

Descrizione delle esperienze.

ESPERIENZA 1ª.

Torino, 22 luglio 1903. — Coniglio maschio. Peso Kgr. 2,420. Da 4 giorni si nutre con pane e crusca. Salasso dalla carotide sinistra.

Soluzione di ossalato ammonico cc. 38.2
Sangue . . . . . » 7.0
10 cc. della miscela son neutralizzati da

1ª prova	3,75	cc. di acido
2ª »	3,75	»
3ª »	3,60	»
Media	3,70	

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono dunque cc. 239 di acido, corrispondenti a gr. 0,383 di Na OH.

ESPERIENZA 2ª.

Torino, 22 luglio. — Coniglio maschio. Peso Kgr. 1,850. Da 4 giorni si nutre di crusca e pane. Salasso dalla carotide sinistra.

Soluzione di ossalato ammonico cc. 38,9
Sangue . . . . . » 6,1
10 cc. della miscela son neutralizzati da

1ª prova	3,30	cc. di acido
2ª »	3,30	»
3ª »	3,30	»
Media	3,30	

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono dunque 243 cc. di acido, corrispondenti a gr. 0,390 di Na OH.

Questi due conigli dovevano esser portati alla Capanna Margherita, ma disgraziatamente morirono soffocati durante il viaggio.

ESPERIENZA 3ª.

Capanna Margherita, 13 agosto. — Coniglio maschio. Giunto da 2 giorni alla Capanna Margherita e nutrito con pane e fieno. Salasso dalla carotide destra.

Soluzione di ossalato cc. 39,9
Sangue . . . . . » 6,75
10 cc. di miscela son neutralizzati da

1ª prova	2,25	cc. di acido
2ª »	2,30	»
3ª »	2,30	»
Media	2,28	»

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono dunque cc. 158 di acido, corrispondenti a gr. 0,253 di Na OH.

Questo coniglio morì di freddo alla Capanna Margherita 3 giorni dopo l'operazione.

ESPERIENZA 4ª.

Capanna Margherita 18, agosto. — Coniglio femmina. Giunto da 7 giorni e nutrito con pane e fieno. Salasso dalla carotide destra.

Soluzione di ossalato cc. 38,9
Sangue . . . . . » 6,7
10 cc. della miscela son' neutralizzati da

1ª prova	2.25	cc. di acido
2ª »	2,25	»
3ª »	2.30	»
Media	2,27	»

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono dunque 154 cc. di acido: corrispondenti a gr. 0,247 di Na OH.

Torino 15 settembre. — Lo stesso coniglio riportato a Torino da 19 giorni e nutrito di pane e crusca. Salasso dalla femorale destra.

Soluzione di ossalato cc. 39,4
Sangue . . . . . » 6,3
10 cc. della miscela son neutralizzati da

1ª prova	3,60	cc. di acido
2ª »	3,60	»
3ª »	3,60	»
Media	3,60	»

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono dunque 261 cc. di acido, corrispondenti a gr. 0,419 di Na OH.

ESPERIENZA 5ª.

Capanna Margherita, 18 agosto. — Coniglio maschio. Da 7 giorni si nutre con pane e fieno. Salasso dalla carotide.

Soluzione di ossalato cc. 38,0
Sangue . . . . . » 7,0
10 cc. della miscela sono neutralizzati da

1ª prova	2,40	cc. di acido
2ª »	2,45	»
3ª »	2,35	»
Media	2,40	»

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono dunque 154 cc. di acido, corrispondenti a gr. 0,247 di Na OH.

ESPERIENZA 6ª.

Capanna Margherita, 21 agosto. — Conigli femmina. Giunta da 4 giorni alla Capanna Margherita e nutrita di pane e fieno. Salasso da una carotide.

Soluzione di ossalato ammonico cc. 39,4
Sangue . . . . . » 6,3
10 cc. della miscela sono neutralizzati da

1ª prova	2,05	cc. di acido
2ª »	2,05	»
3ª »	2,00	»
Media	2,03	»

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono dunque cc. 147 di acido, corrispondenti a gr. 0,236 di Na OH.

Torino, 15 settembre. — La stessa coniglia riportata a Torino da 19 giorni. Nutrita con pane e crusca. Salasso da una femorale.

Soluzione di ossalato ammonico cc. 40,8
Sangue . . . . . » 6,5
10 cc. della miscela son neutralizzati da

1ª prova	3,45	cc. di acido
2ª »	3,45	»
3ª »	3,45	»
Media	3,45	»

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono quindi 251 cc. di acido, corrispondenti a gr. 0,402 di Na OH.

ESPERIENZA 7ª.

Capanna Margherita, 20 agosto. — Cagnetta di nome Musa. Si trova da 9 giorni alla Capanna Margherita. Vitto di carne e pane. Salasso dalla carotide destra.

Soluzione di ossalato ammonico cc. 42,0
Sangue . . . . . » 7,1
10 cc. della miscela son neutralizzati da

1ª prova	2,05	cc. di acido
2ª »	2,05	»
3ª »	2,05	»
Media	2,05	»

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono dunque 142 cc. di acido corrispondenti a gr. 0,227 di Na OH.

Torino, 15 settembre. — La stessa cagna, tornata da 9 giorni a Torino. Vitto di pane e carne. Salasso dalla carotide sinistra.

Soluzione di ossalato ammonico cc. 39,7
Sangue . . . . . » 7,2
10 cc. della miscela son neutralizzati da

1ª prova	3,40	cc. di acido
2ª »	3,45	»
3ª »	3,45	»
Media	3,43	»

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono dunque 223 cc. di acido, corrispondenti a gr. 0,358 di Na OH.

La cagnetta, rimanendo nelle stesse condizioni, respira, invece dell'aria, una miscela composta per $^7/_8$ di idrogeno e per $^1/_8$ d'aria atmosferica. Dopo 66 minuti prendo un altro campione di sangue.

Soluzione di ossalato ammonico cc. 40,9
Sangue . . . . . » 5,4
10 cc. della miscela son neutralizzati da

1ª prova	2,20	cc. di acido
2ª »	2,25	»
3ª »	2,15	»
Media	2,20	»

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono quindi cc. 189 di acido, corrispondenti a gr. 0,302 di Na OH.

ESPERIENZA 8ª.

Capanna Margherita, 20 agosto. — Cagnetta di nome Diana. Si trova da 9 giorni alla Capanna Margherita. Nutrita con pane e carne. Peso Kgr. 4,300. Salasso dalla carotide.

Soluzione di ossalato ammonico cc. 38,3
Sangue . . . . . » 6,0
10 cc. della miscela sono neutralizzati da

1ª prova	1,95	cc. di acido
2ª »	1,95	»
3ª »	2,00	»
Media	1,96	»

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono dunque 145 cc. di acido, corrispondenti a gr. 0,232 di Na OH.

Torino, 14 settembre. — La stessa cagnetta dopo 18 giorni di permanenza a Torino. Vitto di pane e carne. Salasso dalla carotide.

Soluzione di ossalato ammonico cc. 39,3
Sangue . . . . . » 5,6
10 cc. della miscela sono neutralizzati da

1ª prova	3,45	cc. di acido
2ª »	3,45	»
3ª »	3,45	»
Media	3,45	»

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono dunque 277 cc. di acido, corrispondenti a gr. 0,443 di Na OH.

La cagnetta, rimanendo nelle stesse condizioni, respira una miscela composta per $^5/_6$ di idrogeno e per $^1/_6$ di aria. Dopo 50 minuti prendo un nuovo campione di sangue dalla stessa carotide.

Soluzione di ossalato ammonico cc. 41,1
Sangue . . . . . » 7,2
10 cc. della miscela sono neutralizzati da

1ª prova	3,60	cc. di acido
2ª »	3,55	»
3ª »	3,55	»
Media	3,56	»

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono quindi 239 cc. di acido, corrispondenti a gr. 0, 383 di Na OH.

ESPERIENZA 9ª.

Capanna Margherita, 22 agosto. — Scimmia femmina. Si trova alla Capanna Margherita da 10 giorni. Si è nutrita prevalentemente di carote. Salasso dalla carotide.

Soluzione di ossalato ammonico cc. 40,1
Sangue . . . . . » 3,5
10 cc. della miscela son neutralizzati da

1ª prova	1,15	cc. di acido
2ª »	1,15	»
3ª »	1,15	»
Media	1,15	»

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono quindi 144 cc. d'acido, corrispondenti a gr. 0,230 di Na OH.

Torino, 16 settembre. — La stessa scimmia riportata a Torino da 20 giorni. A Torino si è nutrita con carote e frutta. Salasso dalla femorale.

Soluzione di ossalato ammonico cc. 39,8
Sangue . . . . . » 6,0
10 cc. della miscela son neutralizzati da

1ª prova	3,30	cc. di acido
2ª »	3,35	»
3ª »	3,35	»
Media	3,33	»

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono quindi 254 cc. di acido, corrispondenti a gr. 0,407 di Na OH.

ESPERIENZA 10ª.

Capanna Margherita, 16 agosto. — Scimmia maschio. Portata da 4 giorni alla Capanna Margherita. Si è nutrita prevalentemente di carote. Presenta fenomeni di broncopolmonite, da cui però più tardi guarisce. Salasso dalla femorale.

Soluzione di ossalato ammonico cc. 38,3
Sangue . : . . . . . » 3,0
10 cc. della miscela son neutralizzati da

1ª prova	1,25	cc. di acido
2ª »	1,25	»
3ª »	1,20	»
Media	1,23	»

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono quindi 169 cc. di acido, corrispondenti a gr. 0,270 di Na OH.

Riportata a Torino, questa scimmia muore dopo 15 giorni.

ESPERIENZA 11ª.

Capanna Margherita, 24 agosto. — Galeotti. Dopo una permanenza di 12 giorni nella Capanna Margherita. Il vitto non differisce molto da quello abituale di Torino. Salasso dalla vena mediana dell'avambraccio.

Soluzione di ossalato ammonico cc. 39,4
Sangue . . . . . » 7,0
10 cc. della miscela son neutralizzati da

1ª prova	2,35	cc. di acido
2ª »	2,40	»
3ª »	2,30	»
Media	2,35	»

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono quindi 156 cc. di acido, corrispondenti a gr. 0,250 di Na OH.

Torino, 16 settembre. — Disceso il 27 agosto dalla Capanna Margherita, soggiornai fino al 13 settembre a Courmayeur e in questo giorno stesso giunsi a Torino. Salasso fatto introducendo un ago da siringa piuttosto grosso nella vena mediana dell'avambraccio.

Soluzione di ossalato ammonico cc. 41,4
Sangue . . . . . » 6,5
10 cc. della miscela son neutralizzati da

1ª prova	3,80	cc. di acido
2ª »	3,80	»
3ª »	3,85	»
Media	3,82	»

Per neutralizzare 100 cc. di sangue occorrono quindi 281 cc. di acido, corrispondenti a gr. 0,450 di Na OH.

TABELLA RIASSUNTIVA

Le cifre di questa tabella rappresentano l'alcalinità di 100 cc. di sangue misurata in mgr. di Na OH.

	A Torino	Nella Capanna Margherita	Diminuzione dell'alcalinità %	A Torino dopo inalazioni di H	Diminuzione dell'alcalinità %
Coniglio	383	—	—	—	—
Coniglio	390	—	—	—	—
Coniglio	—	253	—	—	—
Coniglio	419	247	41,05	—	—
Coniglio	—	247	—	—	—
Coniglio	402	236	41,29	—	—
Cagna Musa . . .	358	227	36,60	302	15,64
Cagna Diana . . .	443	232	47,85	383	13,54
Scimmia femmina	407	230	43,49	—	—
Scimmia maschio	—	270	—	—	—
Galeotti.	450	250	44,57	—	—

Da questa tabella è facile vedere come in tutti gli animali si sia verificata una considerevole diminuzione dell' alcalinità del sangue (dal 36 al 44 %), allorchè furono trasportati nella Capanna Regina Margherita, e così pure si ebbe una certa diminuzione dell' alcalinità (di 13-15 %) nei due cani, allorchè fu fatta respirare loro una miscela di gas, nella quale l' ossigeno era assai scarso.

Queste due ultime esperienze fanno supporre che la causa prima della diminuzione della alcalinità, anche negli animali trasportati nella Capanna Regina Margherita, sia la minor quantità di ossigeno che per la diminuita pressione è dato di respirare. Anche per altre cause, che pure determinano una diminuzione nella quantità di ossigeno respirato, fu osservato un abbassamento dell'alcalinità del sangue. Ciò constatarono infatti Haan e Zeehuiren negli animali in agonia e Thomas nell' intossicazione acuta per alcool.

Da altra parte altre ricerche, di recente pubblicate, hanno dimostrato che nella insufficienza di ossigeno, per qualsiasi causa, si altera il ricambio in modo che compariscono nel sangue quantità abnormi di acidi grassi e specialmente di acido lattico. Tali furono i resultati di Terray, di Saito e Kutsuyama nei polli, di Araki e di Saiki e Wakayama, i quali ultimi autori trovarono un aumento nella produzione dell'acido lattico durante l'avvelenamento con CO.

Si può quindi credere che anche negli animali che soggiornarono nella Capanna Regina Margherita fosse avvenuta una maggior produzione di acido lattico e che da ciò fosse dipesa la diminuzione dell'alcalinità del sangue.

Quindi si comprende anche la diminuzione del CO^2 nel sangue degli animali mantenuti nelle stesse condizioni, come Mosso e Marro hanno potuto constatare. Tale diminuzione del CO^2 supera però di poco il 10 %, mentre l'abbassamento dell'alcalinità da me osservata importa circa il 40 %.

Ciò indica che non vi è parallelismo tra alcalinità e contenuto in CO^2, almeno finchè si misura l'alcalinità con un metodo di titolazione (1), ed infatti, come ho accennato in principio, la quantità di carbonati entra solo in parte nel complesso dei fattori che costituiscono la maggiore o minore capacità del sangue a neutralizzare gli acidi.

Compio un gradito dovere nel ringraziare qui pubblicamente il professor Mosso, che con grande liberalità e cordialità volle permettermi di far parte della sua spedizione scientifica, e mi fornì in tal modo l'occasione ed i mezzi per eseguire queste ricerche.

BIBLIOGRAFIA.

Mosso e Marro, *Le variazioni che succedono nei gas del sangue sulla vetta del Monte Rosa.* Rend. Accad. Lincei, 1° sem. 1903, fasc. 12.

Höber, *Ueber die Hydroxylionen des Blutes.* Pflüger's Arch. Vol. 81, pag. 522.

Fränkel, *Eine neue Methode zur Bestimmung der Reaction des Blutes.* Pflüger's Arch. vol. 96, pag. 601, 1903.

Cohnheim, *Ueber das Salzsäure-Bindungsvermögen der Albumosen und Peptone.* Zeitschr. f. Biologie N. F. XV pag. 489, 1896.

Bugarzky u. Liebermann, *Ueber das Bindungsvermögen eiweissartiger Körper für Salzsäure.* Pflüger's Archiv. vol. LXXII, pag. 51, 1898.

Spiro u. Pemsel, *Ueber Basen- und Säure Capacität des Blutes und der Eiweisskörper.* Zeitschr. f. physiol. Chemie, vol. 26, 1898, pag. 233.

Loewy, *Untersuchungen zur Alkalescenz des Blutes.* Pflüger's Arch. 1894, vol. 58, pag. 462.

Cohnstein, *Ueber die Aenderung der Blutalkalescenz durch Muskelarbeit.* Virchow's Arch. Vol. 130, 1892 pag. 332.

(1) Lehmans ha voluto fare determinazioni comparative della alcalinità per mezzo di titolazioni, e per mezzo della quantità di CO^2 che si può liberare dal sangue. Le cifre ottenute in quest'ultimo modo erano di circa il 25 % più piccole.

Foderà e Ragona, *Studi sull' alcalescenza del sangue.* Arch. di farm. e terap. 1897, Vol. V e 1898 vol. VI.

Ascoli. *Studi emoalcalimetrici.* Clinica medica italiana, vol 38, 1899.

Haan en Zeehuiren, *Bydrage tot de leer de alcaliciteit van het bloed.* Nederlandsch Natuur en Geneeskundig Congres te Haarlem 1899.

Thomas, Arch. f. exper. Pathol. u. Pharmak. vol. 41, pag. 1.

Terray, *Ueber den Einfluss des Sauerstoffsgehaltes der Luft auf dem Stoffwechsel.* Pflüger's Arch. Vol. 65 1897.

Saito u. Katsuyama. *Beiträge zur Kentniss der Milchsäurebildung in tierischen Organismen beim Sauerstoffmangel.* Zeitschr. f. physiol. Chem. 1901 vol. 32.

Araki, Varî lavori nella Zeitschr. f. physiol. Chem. Vol. 15-19.

Saiki u. Wakayama, *Ueber die Wirkung des Kohlenoxyds auf dem Kohlensäuregehalt des Blutes.* Zeitschr. f. physiol. Chem. Vol. 34, 1901.

Lehmans, *Untersuchungen über die Alkalescenz des Blutes und speciell über die Einwirkung der Kohlensäure darauf.* Pflüger's Arch. 1895 Vol. 58, pag. 428.

Psicologia sperimentale. — *Intorno ai tempi di reazione semplice delle sensazioni tattili di carico* (1). Nota I del prof. Federico Kiesow, presentata dal Socio A. Mosso.

I.

L'uso della corrente elettrica come stimolo per la determinazione dei tempi di reazione delle sensazioni tattili ha, come già Exner (2) fece notare, degli inconvenienti. Siccome il metodo di von Frey, che io parecchie volte ebbi occasione di descrivere in precedenti lavori, permette per via puramente meccanica, una misura esatta delle sensazioni tattili, mi parve opportuno riprendere l'indagine dei tempi di reazione tattile appunto servendomi di questo metodo. Le sensazioni tattili possono venire suscitate meccanicamente sulla superficie cutanea mediante il carico, lo scarico e la trazione. Nel presente lavoro, però, mi sono limitato esclusivamente alla sensazione di carico. Venivano stimolati tanto singoli punti tattili isolati quanto punti tattili non isolati. Per i punti tattili non isolati mi sono servito della regione del polpastrello delle dita della mano, per quelli isolati, della regione del polso e di qualche altra regione cutanea. Fin da principio diressi la mia attenzione in modo speciale sopra l' influenza che l'intensità dello stimolo applicato avrebbe potuto esercitare sul tempo di reazione. Inoltre mi sono interessato di studiare il rapporto esistente tra il valore medio e la frequenza dei singoli valori.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Torino, Sezione di Psicologia sperimentale.

(2) S. Exner, Pflügers Archiv, vol. VII, pag. 624. 1873.

Le disposizioni per gli esperimenti furono, per la presente ricerca, in ogni particolare le medesime che quelle già descritte in modo generale in un mio lavoro, pubblicato recentemente nei Rendiconti di questa Accademia, e intitolato: *Contributo allo studio della velocità di propagazione dello stimolo nel nervo sensitivo dell'uomo* ». Dacchè lo spazio non mi concede di descriverle in esteso, mi limito a questo rimando. Per la stessa ragione mi limito qui a comunicare alcuni dei principali risultati, rimandando per il resto al lavoro in esteso, il quale verrà prossimamente pubblicato nella Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane.

I peli stimolatori adoperati avevano valori di tensione di: 1; 2; 3; 5; 6; 8; 10,5 e 15 grammi per millimetro di raggio ($g/^{mm}$.).

Per il polpastrello delle dita facevo uso inoltre di uno stimolo molto forte prodotto mediante un estesiometro da me ideato, il quale porta, invece del pelo, una bacchettina di legno di 0,8 mm^2 di superficie stimolatrice e della quale si varia a volontà la forza mediante una molla. In seguito questo stimolo viene designato sempre come *stimolo massimo*. Questo estesiometro si fissava, come i peli stimolatori, sul mio elettroestesiometro. La velocità di applicazione era sempre al di là del *maximum* di influenza (*übermaximal*). Aggiungo che, nei miei esperimenti, l'altezza dello stimolo era raggiunta a quel punto al di là del quale la eccitazione degli organi dolorifici vicini avrebbe fatto valere la propria influenza. Per il polpastrello questo punto era a un dipresso rappresentato dall'accennato stimolo massimo e per i punti tattili isolati da 15 $g/^{mm}$.

Nel 1888 L. Lange (1) scoprì nel laboratorio di Wundt la differenza che esiste fra la forma di reazione *sensoriale* e la forma *muscolare*. Più tardi il valore generale di questo fatto è stato messo in dubbio (2). Colla presente ricerca, però, io ho potuto non solo confermare il valore generale del fatto, ma anche stabilire che, oltre a queste due forme di reazione ne esiste una terza intermedia che io chiamo la *reazione indifferente*. L'ho designata così perchè in questo caso l'attenzione si mantiene indifferente tanto di fronte allo stimolo quanto di fronte al movimento di reazione. Lange trovò un prolungamento del tempo di reazione quando il soggetto dirige l'attenzione esclusivamente sull'impressione da aspettarsi, e d'altra parte una diminuzione del tempo quando l'attenzione viene concentrata sul movimento da compiersi. Ora, io ho trovato che, quando cercavo di distogliere l'attenzione, così dall'impressione da aspettarsi come dal movimento da compiersi, fissandola su un'altra sensazione, per es. su quella provocata dal premere leggermente la punta della lingua contro i denti chiusi, risultò un tempo di reazione *generalmente* intermedio tra il valore della reazione muscolare e quello della rea-

(1) L. Lange, Philos. Studien, vol. IV, pag. 479. 1888.
(2) J. Mckeen Cattell, Philos. Studien, vol. VIII, pag. 403. 1893.

zione sensoriale. Questo fatto costituisce una nuova prova della grande influenza esercitata dall'attenzione sui tempi di reazione. Non c'è forse bisogno di far notare che, come per le due altre forme di reazione, così pure per la reazione indifferente, è necessario un esercizio speciale. Aggiungo ancora che ci sono persone che stentano ad abituarsi a reagire specialmente nella forma sensoriale, con una certa regolarità; e si trovano persino individui i quali, a quanto pare, non ci riescono mai perfettamente. Ciò malgrado, la direzione dell'attenzione, per quanto ho potuto osservare, non rimane mai senza una certa influenza sulla durata della reazione. La reazione sensoriale diventa più difficile con stimoli forti, più facile con stimoli di intensità media e rimane la sola forma possibile di reazione trattandosi di stimoli molto deboli o di stimoli di valore di soglia. Mi sembra, quindi, indicato cominciare l'esercizio in questa forma di reazione con stimoli deboli. Le reazione muscolare, per contro, riesce più facile con stimoli forti; si fa man mano più difficile col decrescere della intensità dello stimolo e diventa, in ultimo, assolutamente impossibile. Il soggetto si abituerà, quindi, più facilmente a questa forma di reazione se si comincia l'esercizio con stimoli forti. Per la reazione indifferente, infine, conviene, secondo le mie esperienze, cominciare con stimoli di intensità media. Il fatto, che una intera specie di sensazioni (le gustative), come ebbi recentemente a dimostrare, costituisce una eccezione, nel senso che ammette solo la forma sensoriale di reazione, non fa che confermare la regola generale dell'influenza che l'attenzione esercita sulla durata dei tempi di reazione.

Allorchè, circa 5 anni or sono, cominciai ad occuparmi di esperimenti di reazioni, usando stimoli piuttosto forti ed avendo scelto a questo scopo soggetti che non sapevano niente della scoperta di Lange, ebbi presto a constatare, nelle reazioni a stimoli tattili ed acustici, le differenze individuali già conosciute. Potei, inoltre, notare che le reazioni dei singoli soggetti manifestavano differenze caratteristiche, inquantochè i valori di tempo in alcuni si avvicinavano di più a quelli della reazione muscolare, mentre in altri casi mostravano la tendenza ad approssimarsi a quelli della reazione sensoriale. L'avvicinamento alla reazione muscolare era, però, in questi casi, più notevole che quello alla reazione sensoriale. Quando, molto più tardi ripresi questi esperimenti su altre persone che pure ignoravano l'esistenza di differenti forme di reazione, riconobbi che sono da distinguere non *due* ma *tre* tipi diversi. Accanto alle persone di tipo sensoriale e muscolare esiste, indubbiamente, un terzo gruppo di persone, le quali (dopo gli esercizi preliminari, ben inteso) benchè mostrino anch'esse la tendenza a reagire rapidamente, si sforzano nello stesso tempo di afferrare anche l'impressione colla maggiore rapidità possibile. Conviene tener presente inoltre che, nelle persone, delle quali l'attenzione non viene diretta in una determinata direzione, si forma facilmente l'opinione che il còmpito del soggetto sia di reagire il più rapidamente possibile; ed è evidente che una

tale tendenza, una volta presa, sarà piuttosto secondata che affievolita da stimoli forti; ma ciò che è caratteristico per questo terzo tipo è precisamente, che le persone che vi appartengono vengono influenzate *nello stesso tempo* anche dalla attesa della impressione e quindi non possono raggiungere un maximum di concentrazione nella direzione del movimento.

Per questa ragione le loro reazioni non possono mai diventare di natura riflessa, assumendo esse, invece, un carattere, il quale si potrebbe convenientemente dire *misto*, aggettivo questo che è già stato applicato da Wundt a reazioni eseguite prima della scoperta di Lange.

Ho potuto studiare questi fenomeni più minuziosamente in quattro persone, delle quali due appartenevano al tipo misto, una al tipo sensoriale e una a quello muscolare. Feci gli esperimenti sul polpastrello del dito medio della mano sinistra, cominciando collo stimolo massimo. Osservai che la persona di tendenza muscolare, appena abituatasi alquanto agli esperimenti, cominciò di moto proprio a reagire muscolarmente. Nello stesso tempo si fecero notare in questa persona i fenomeni caratteristici detti reazioni erronee e reazioni anticipate, mentre pure nella variazione media si manifestò chiaramente il carattere sintomatico di questa forma di reazione. Del pari i due soggetti appartenenti al tipo misto mostrarono i segni distintivi che ho sopradescritti. Le reazioni erronee non erano in essi del tutto assenti, ma erano rare. Tanto i loro valori medii quanto le variazioni medie tengono un posto di mezzo tra la reazione sensoriale e la muscolare. Il soggetto a reazioni sensoriali, quando si usava lo stimolo massimo, mostrava solo una tendenza a questa forma di reazione. Egli, come risultò da quanto mi comunicò, si era concentrato sempre sull'impressione da aspettarsi, avendo avuto costantemente, quantunque egli fosse ad occhi chiusi, un'imagine visiva abbastanza vivace dell'apparecchio stimolatore e del luogo d'applicazione. Inoltre disse di aver cercato di non reagire troppo lentamente. Per quanto riguarda quest'ultimo punto, non c'è d'uopo, mi sembra, di aggiungere altro a quello che, già sopra, fu detto. Con ciò si spiega sufficientemente perchè il valore medio non abbia raggiunto l'altezza della reazione sensoriale pura. La differenza, però, fra questo tipo e il tipo misto del quale poc'anzi è stata questione, è nondimeno ben evidente. Mentre gli individui appartenenti al tipo misto sono dominati nel medesimo tempo da ambedue i fattori, l'indizio caratteristico del tipo sensoriale consiste in ciò, che, fin da principio, la concentrazione sull'impressione è il fattore preferito, al quale si associa soltanto secondariamente il desiderio di non ritardare la reazione. A ciò corrisponde il fatto che il valore medio e la variazione media nel tipo sensoriale sono più alti che nel misto.

Allorquando lo stimolo veniva diminuito, ed io, invece di uno stimolo forte, ne adoperavo uno di intensità media, le caratteristiche di questi tre tipi si accentuavano straordinariamente. Come stimolo tattile ho scelto un

pelo stimolatore di un valore di tensiono di 6 g/^{mm}. Questo rappresenta una intensità che ammette, senza qualsiasi difficoltà, la reazione muscolare di massimo grado.

Mentre il soggetto di tipo sensoriale, a causa della circostanza già accennata, mostrava, nelle sue reazioni allo stimolo forte, solo la tendenza alla forma sensoriale, risultò ora dalle sue reazioni un valore medio, il quale, se non raggiungeva completamente quello che ebbi da me stesso quando reagivo in modo puramente sensoriale dopo un *maximum* di esercizio, non rimaneva, però, molto al di sotto di esso. Questa differenza in meno si spiega appunto collo sforzo fatto di non ritardare la reazione: è da ricordarsi a questo riguardo che non bisogna mai perdere di vista che si ha da fare con persone che non conoscevano affatto l'esistenza di diverse forme di reazione.

In un modo egualmente sorprendente si affermò il tipo del soggetto con reazioni muscolari. Mentre la diminuzione dell'intensità dello stimolo in tutte le altre persone ebbe per seguito un aumento nei valori medî, in questo caso si verificò il contrario. Lo stimolo meno forte cagionò una, se non molto notevole, però ben evidente diminuzione del valore medio, benchè i singoli valori mostrassero oscillazioni maggiori che nel primo caso. Il soggetto mi disse di essersi accorto fin da principio della diminuita intensità dello stimolo, ma di aver cercato, con sforzo di volontà, di opporsi agli effetti di questa diminuzione.

Se, in questi due soggetti estremi, era interessante vedere come la diminuzione dell'intensità dello stimolo faceva risaltare sempre più la loro disposizione tipica, così pure, nei due soggetti del tipo intermedio, era nondimeno interessante di osservare la costanza del carattere misto delle loro reazioni. La diminuita intensità dello stimolo determinava, certamente, un aumento dei valori medî, ma questi continuavano a trovarsi frammezzo ai due valori estremi. Il valore medio era, inoltre, di nuovo quasi identico nelle due persone (1).

L'intensità dello stimolo venne poi diminuita di tanto, che riusciva difficile la reazione muscolare. Mi servii come stimolo tattile, di un valore di tensione di 2 g/^{mm}. In questi esperimenti pure si poterono osservare, in generale, gli stessi fenomeni sopra descritti, benchè la diminuzione dello stimolo influisse nel modo prevedibile. Dal soggetto di tipo sensoriale, il quale, non più preoccupato ormai dal pensiero del movimento del dito, si concentrava, per forza, interamente sull'impressione da aspettarsi, ebbi un valore medio che superava quello ottenuto da me stesso (vedi Tab. nella continuazione). Il soggetto di tipo muscolare cercò di nuovo con maggior sforzo della volontà di resistere all'influenza delle condizioni di esperimento cambiate, ma non raggiunse i valori di prima, dacchè fu costretto di volgere l'attenzione in parte

(1) Naturalmente non si deve credere che questa identità sia costante in tutti gli individui di tipo misto.

sull'impressione. Dal soggetto di tipo misto (1) ebbi un valore medio, che si trovava sempre ancora frammezzo ai due estremi, quantunque fosse, naturalmente, di molto aumentato.

Queste esperienze, a quanto mi sembra, insegnano che i singoli individui portano agli esperimenti di reazione, fin da principio una determinata disposizione, la quale, se i soggetti sono lasciati a sè stessi e continuando l'esercizio, li costringe ad assumere gradatamente un determinato tipo. In questa disposizione naturale abbiamo certamente da cercare una buona parte delle cause, alle quali sono dovute le differenze personali.

Certo, con ciò queste differenze individuali non vengono spiegate in tutti i loro particolari. Lasciando da parte le condizioni esterne, di fronte alle quali i soggetti si comportano, forse, anche diversamente, lasciando pure da parte le grandi differenze di età (*Exner*), abbiamo ancora da prendere in considerazione, nei singoli casi, altre diversità anatomo-fisiologiche derivanti in parte dall'eredità, in parte da caratteri acquistati. Così, p. es. sotto condizioni altrimenti eguali, gli uni potranno sempre muovere le dita un po' più rapidamente degli altri. Uno studio accurato di questi fatti ci condurrebbe probabilissimamente a fare delle sotto-divisioni dentro i limiti dei singoli tipi. Il tipo si mostrerà in un caso più accentuato che in un altro. In generale, però, mi sembra che questi tre tipi principali possano bastare. Inoltre, non si dovrà trascurare, nella scelta dei soggetti e nel giudicare i risultati da essi ottenuti, di tener conto di certi stati fisici confinanti il patologico, i quali a tutta prima ci possono sfuggire se non ci si dedica un esame speciale. Ho osservato in persone di grande intelligenza e di educazione scientifica, ma con una tendenza alla neurastenia, che, tanto i loro riflessi quanto i loro movimenti di reazione erano straordinariamente rapidi e precisi. In simil modo, altre condizioni avranno una certa influenza sui tempi di reazione. Uno studio più esauriente di queste condizioni e la spiegazione di esse però restano còmpiti della psicopatologia.

In ultimo credo opportuno aggiungere qualche parola sulla facoltà della *visualizzazione*, posseduta da due dei miei soggetti, e alla quale più sopra ho fatto un accenno soltanto. Faccio notare che non si tratta di imagini consecutive, ma di quei processi centrali minuziosamente studiati e descritti da Galton. I due soggetti mi comunicarono che comunemente sorge in loro un'imagine visiva di qualsiasi oggetto appena venga nominato o al quale essi rivolgano il pensiero. Queste imagini visive, nelle mie esperienze, erano più vivaci nel soggetto di tipo sensoriale che nell'altro.

Mi limito qui a dire che questa facoltà di visualizzare, o i diversi gradi di essa, non hanno nessun rapporto *essenziale*, sia colla disposizione tipica,

(1) Per quest'ultima serie di ricerche mi potei servire di uno solo dei soggetti di tipo misto.

sia collo sviluppo del modo di reagire. Tutt'al più, possiamo vedere in essa un fattore ausiliare, dacchè la direzione dell'attenzione, determinata dalla disposizione o dettata dalla volontà, sarà mantenuta meglio in virtù dell'immagine visiva che si associa come elemento secondario, favorendo così la regolarità delle singole reazioni. Può darsi forse, inoltre, che sia più facile esercitare le persone, che posseggono questa facoltà, nell'una o nell'altra direzione, ma di per sè la visualizzazione è un fattore indipendente in questi processi.

La seguente tabella mostra i risultati ottenuti da questi soggetti:

Stimolo	Sig. E. Bizzozero stud. in med. tipo muscolare			Dr. Sacerdotti tipo sensoriale			Sig.ra E. Kiesow tipo misto			Dr. Marocco tipo misto		
	Media aritm. in σ	Variazione media	Num. dei singoli valori	Media aritm. in σ	Variazione media	Num. dei singoli valori	Media aritm. in σ	Variazione media	Num. dei singoli valori	Media aritm. in σ	Variazione media	Num. dei singoli valori
Stimolo massimo . .	135,83	10,424	100	178,39	18,073	100	155,60	16,500	100	155,30	12,624	50
6 g/mm. .	128,40	13,372	50	213,53	22,762	100	167,12	18,045	100	168,82	34,130	50
2 g/mm .	147,28	12,331	50	246,48	18,858	50	—	—	—	192,40	22,280	50

Adunanza dell'Associazione internazionale delle Accademie tenutasi a Londra nel giugno 1903.

Il Socio Angelo Mosso incaricato dalla Presidenza dell'Accademia di rappresentare i Lincei all'adunanza del Consiglio dell'Associazione internazionale delle Accademie tenutasi a Londra nello scorso giugno, riferisce intorno ai lavori compiuti.

Venne discussa la proposta presentata dalla Società Reale di Londra e dall'Accademia delle scienze di Parigi, riguardo al modo di organizzare la cooperazione internazionale nelle imprese scientifiche, che richiedono dei sussidî in danaro. L'Accademia delle scienze di Parigi dopo aver nominato una Commissione la quale studiò questo problema, specialmente per le investigazioni aerostatiche, propose di deferire all'Associazione internazionale delle accademie l'esame dei progetti che per il loro carattere ufficiale richiedono la cooperazione degli Stati. Eguale proposta venne adottata per istituire un'associazione sismologica internazionale.

La Società delle scienze di Sassonia rappresentata dai prof. Paolo Flechsig e Guglielmo His, riferì intorno al lavoro compiuto dalla Commissione nominata nell'adunanza generale di Parigi del 1901.

Si tratta di promuovere la conoscenza del cervello per mezzo di una cooperazione internazionale nel lavoro scientifico. A tale scopo si propone di fondare un sistema internazionale di Istituti che abbiano lo scopo di organizzare meglio lo studio del cervello, divenuto sempre più difficile per il grande numero dei metodi e le differenze profonde nella loro applicazione alle indagini. Riconosciuto come oramai sia impossibile dominare l'intero campo dell'anatomia dei centri nervosi anche pei ricercatori che sono dotati dell'energia maggiore di lavoro, la Commissione propose di provvedere per mezzo di un'associazione internazionale allo studio dell'anatomia, dell'istologia, della fisiologia, della storia dello sviluppo, della patologia e delle discipline liniche, come pure dell'anatomia comparata, per quanto riguarda la struttura e le funzioni dei centri nervosi. Ammessa dall'Associazione l'utilità di questo progetto, per l'indole sua troppo speciale, venne discusso in tre sedute alle quali presero solo parte i rappresentanti dell'anatomia e della fisiologia.

La Commissione, convinta delle difficoltà gravissime che si incontreranno per dare vita a questa istituzione internazionale, propone che si divida il lavoro stesso di organizzazione nominando un certo numero di Commissioni speciali, le quali riferiscano il lavoro compiuto ad una Commissione centrale non troppo numerosa. Gli istituti da fondarsi dovrebbero avere prima lo scopo di promuovere le ricerche, e dopo quello di diffondere le conoscenze. Certo sarebbe un grande progresso per gli studî l'istituzione di un sistema di Istituti, così che si sapesse che in una data città si trova raccolto il materiale per lo studio embriologico del sistema nervoso; in un'altra ordinato e pronto quello per l'anatomia comparata; che istituti speciali dessero quanto occorre per le indagini antropologiche e fisiologiche e che tali istituti potessero ajutarsi non solo reciprocamente, ma uniformando la nomenclatura, regolando con metodi migliori quanto si riferisce al peso, alla misura ed alla statistica dei centri nervosi.

Il prof. Waldeyer presentò un progetto di organizzazione che venne approvato con voto unanime, e sarà discusso nella prossima adunanza generale dell'Associazione internazionale delle accademie, che si terrà a Londra nel 1904.

L'Accademia delle scienze di Washington aveva espresso il desiderio che il Laboratorio fisiologico nella Capanna Regina Margherita sulla vetta del Monte Rosa fosse considerato come un istituto internazionale sotto la direzione dell'Associazione internazionale delle accademie. Tale proposta venne sostenuta dall'Accademia dei Lincei. Il Consiglio dell'Associazione internazionale delle accademie deliberava con voto unanime che l'istituzione della Capanna Regina Margherita sulla vetta del Monte Rosa dovesse considerarsi come utile alla scienza e come tale meritasse il suo appoggio.

L'Accademia delle scienze di Berlino e quella di Kopenhagen fecero la proposta di organizzare la pubblicazione di un *Corpus medicorum antiquo-*

rum, il quale contenga il testo originale dei medici più celebri greci e latini. L'Accademia delle scienze di Vienna ha d'accordo colle accademie predette cooperato alle opportune ricerche nelle biblioteche di Europa per conoscere i migliori manoscritti. Le proposte concrete pel progetto di questa pubblicazione, la quale comprenderà circa 37 volumi, verranno presentate alla prossima adunanza generale dell'Associazione internazionale delle accademie.

PERSONALE ACCADEMICO

Commemorazione del Socio Luigi Cremona, letta dal Socio G. Veronese nella seduta del 6 dicembre 1903 (1).

Nessuno potrebbe senza trepidazione parlare dinanzi a voi del grande geometra che fu Socio di questa Accademia. Per meglio apprezzare l'opera di lui è necessario considerarlo sotto i molteplici aspetti di patriotta, di scienziato, di uomo pubblico e privato, nel tempo e nelle condizioni della vita di lui: nè avrei accettato l'onorifico incarico affidatomi dalla Presidenza se non avessi sperato che l'obbligo mio di soddisfare un debito di riconoscenza verso l'amato maestro mio, possa scusare la pochezza delle mie forze.

Milano era insorta: si scriveva nella storia del risorgimento italiano una pagina immortale e un'altra rammentava le gesta gloriose di Venezia. Già per tutta la penisola correva il fremito della riscossa, e dopo tanti atti di eroismo, tanti tormenti di esuli, di prigionieri, di decapitati, la coscienza nazionale era andata sempre più rinvigorendosi e trovava nelle infelici e onorate battaglie del 1848 la scuola alle altre, più fortunate, che la guidarono al trionfo. Il 12 aprile di quell'anno giungevano in Pavia 160 studenti napoletani volontari. In quel manipolo di valorosi corse ad arrolarsi un giovanetto appena diciassettenne, gracile di corpo ma con anima ardente di patriotta, pieno di fede nelle sorti riserbate alla patria; un giovanetto toltosi agli studî prediletti e alla madre derelitta « senza rimorso (scriveva egli stesso), « perchè avrebbe creduto di mancare ai dettami della più santa delle reli- « gioni, e di commettere un atto di viltà e inettitudine ricusando di dare « il sangue per la patria ». Il piccolo eroe era Luigi Cremona. Il 18 aprile, sotto la guida degli ufficiali Carrano e Mauro quel drappello di studenti veniva inviato dal governo provvisorio di Milano ad aiuto della Venezia. Il

(1) Commemorarono il Cremona: al Senato nella tornata del 12 giugno S. E. il Presidente on. Saracco e il sen. Finali a cui si associò il Governo; alla Camera elettiva l'on. Pinchia, già sottosegretario di Stato col Cremona nel 1898; alla R. Accademia delle scienze di Torino E. D'Ovidio; a quella di Napoli E. Fergola; al R. Istituto Lombardo G. Celoria; negli Annali di Matematica G. Jung; e nel *Periodico di Matematica* e nel *Pitagora*, le rispettive direzioni.

Cremona fu dapprima a Nervesa, agli avamposti sulla Piave, poi alla difesa di Treviso, sulle barricate e nelle sortite, meritando pel coraggio e la diligenza di esser fatto caporale e poi sergente. Caduta Treviso, ma salvo l'onore delle armi, il Cremona insieme cogli studenti napoletani si ascriveva a Bologna nel secondo battaglione *Italia Libera*, e ritornato nella Venezia, dopo la capitolazione di Milano, prese parte ai fatti più importanti lungo le lagune, quando la veneranda regina dell'Adriatico decretò di resistere a ogni costo, e seppe resistere finchè la fame e il morbo la fecero soggiacere, divenuta rifugio al valore degli ultimi difensori del nome italiano.

Il Cremona fu dei primi nella sortita di Mestre e lasciò la bombardata Marghera che fuoco violento aveva ridotta un cumulo di macerie. Di là passò al forte di Brondolo a Chioggia, nell'altra estremità della laguna, di cui i nemici avevano pure tentato di farsi padroni durante il blocco; e poi nuovamente agli avamposti sul Brenta alla difesa di Ca' Naccari al combattimento di Conche e alla presa di ridotti nemici. Il Cremona « pel suo coraggio, per la sua intelligenza, per la disciplina ed onestà, veniva dal capitano Mauro mostrato ai soldati come modello di virtù militari e civili ». Rimase a Brondolo fino alla caduta di Venezia, vero eroe del dovere in quei giorni di sciagura. Le brevi Memorie che il Cremona lasciò scritte sull'indipendenza d'Italia lumeggiano ancor meglio la figura dell'uomo, che, se non potea avere, per l'età sua, una parte notevole in quegli avvenimenti, fu davvero un prode soldato. Mentre tornava alla sua Pavia colla speranza di rivedere la povera madre, alla quale aveva continuamente pensato, e di trovare in lei conforto ai patimenti sofferti, riceveva in Groppello l'angosciosa e inattesa notizia che era morta! E intanto scoppiava in lui un terribile tifo, di cui aveva portato i germi dalla guerra, che lo condusse quasi al sepolcro. Così terminò questo periodo glorioso della prima gioventù di Luigi Cremona, che per la sua modestia non parlava quasi mai a nessuno dei fatti importanti ai quali aveva partecipato così eroicamente!

S'intravedono subito le belle qualità dell'uomo di cui più tardi avremo tanti splendidi esempî.

Egli nacque dal secondo matrimonio di Gaudenzio, modesto impiegato comunale, ma oriundo di cospicua famiglia di Novara, con Teresa Andreoli; dalla quale ebbe quattro figliuoli. Luigi fu il primo, due morirono presto e Tranquillo, il pregiato pittore, a quarant'anni. Fecero connubio, in una fortunata famiglia, arte e scienza: così il pittore, come il dotto di geometria pura, nell'intuizione dello spazio, manifestando, per modi diversi, il pensiero.

Il Cremona, compiuti con profitto e con premî gli studî classici, al tornare dalla guerra s'inscrisse a Pavia nell'Università, ove ebbe a maestri il Bordoni e il Brioschi. Conseguì la laurea d'ingegnere-architetto nel 1853 e fece il ripetitore di matematica applicata, con soddisfazione del Brioschi, dal 1852 al 1855. Dati gli esami speciali di matematica e fisica per l'inse-

gnamento secondario, insegnò nei Licei di Pavia, di Cremona e di Milano fino al 1860. Fu di quelli insegnanti che i nuovi ordini dati alle scuole dell'Austria dal conte Thun chiamarono a far rivivere le scuole stesse.

Non è possibile dare sano giudizio dell'opera scientifica di Luigi Cremona, senza riportarsi alle condizioni degli studî in Italia nella prima metà del secolo scorso, che non somigliano al tempo nostro. Non mancavano bravi cultori delle matematiche e ve n'erano di grande valore, come il Plana a Torino, il Paoli e il Mossotti a Pisa, il Bellavitis a Padova, il Fergola a Napoli, il Ruffini a Modena, il Bordoni a Pavia; bensì mancava la vita universitaria e i pochi valenti erano ignoti non solo all'estero ma tra i nostri, tanto che alcune scoperte fatte da loro tornavano in Italia come cose nuove. Non si può dire, come si pensò, che cause ne fossero le difficili comunicazioni e gli studî superiori non bene ordinati; bensì abbiamo a ripetere sempre, che ne danno la ragione le condizioni della politica italiana.

Già fino al 1840, in tutti gli Stati italiani, temevano i principi dei novatori e l'uno dell'altro diffidavano: era loro intento impedire che letterati e dotti mostrassero la potenza della libertà. Di qui il volgere i popoli ai piaceri della vita; ma di qui, nei più ingegnosi tra i cittadini, il preferire le lettere alle scienze, perchè colla letteratura meglio commovevano, scaldavano e rinvigorivano la nazione. Bensì va notato, che gli scienziati non si mostrarono, nè meno animati, nè meno zelanti dei letterati; gli uni e gli altri aiutandosi nei Congressi dei dotti, tenuti dal 1839 al 1847, il primo a Pisa e l'ultimo a Venezia, in un vero campo di battaglieri coraggiosi. E nei comitati segreti, negli esigli, sui campi di battaglia o nei governi provvisori, molto spesso troviamo valorosi matematici.

Il Cremona cominciò a mostrare il suo valore di dotto nel 1855, poco avanti il tempo nel quale l'Italia, uniti molti dei suoi figli, volle ravvivare, negli studî, la potenza intellettuale della nazione. Per molte vie si adoperò, e tra le altre, istituendo nuovi insegnamenti, come quello della Geometria superiore a Napoli, Pavia, Torino e Bologna; e a Bologna fu chiamato appunto il Cremona: e se il 20 giugno del 1860 fu giorno lieto per lui, lieto ed onorato resta per la scienza italiana.

Se volessi parlare di ciascuno dei lavori del Cremona, troverei troppo tiranniche le leggi di un discorso, ma sarò lieto se potrò appena far rilevare i momenti principali dell'opera scientifica del grande maestro.

Dal 1853, quando ebbe la laurea di ingegnere-architetto, fino al salire sulla cattedra di Bologna, pubblicò parecchie Memorie inspirate, le prime, dalle ricerche e informate ai metodi di illustri maestri, del Bordoni e del Brioschi. Trattò nel 1855 delle tangenti sfero-coniugate delle superficie. Il Bordoni aveva data una generalizzazione del problema delle tangenti coniugate di Dupin: di qui prese le mosse il Cremona, e più tardi ebbe a trattare un caso più generale nel quale il contatto fra la superficie data e le

inviluppate lungo una sua linea è di primo ordine e i punti di contatto sono ombelichi per le inviluppate medesime. Ebbe a studiare l'estensione di quelle proprietà delle coniche inscritte in un quadrilatero, che avevano occupato i più grandi geometri da Eulero a Steiner, alla geometria dello spazio, trattando delle superficie della seconda classe inscritte in una superficie sviluppabile di quarta classe. Poi si volse alle coniche sferiche confocali, delle quali aveva trattato lo Chasles, ed a questioni da questo e da altri autori proposte, sia in Note separate, sia nelle « Nouvelles Annales de mathématiques ». Le curve spaziali, dette gobbe, con brutto vocabolo, fino al 1837, erano state poco studiate, per le difficoltà che si incontravano col metodo analitico. I metodi della geometria pura aprirono nuove vie alla ricerca. Dopo alcune proprietà date dal Moebius e dal Cayley sulla cubica gobba, lo Chasles partendo, come asserisce il de Jonquières, dalla costruzione mediante due stelle collineari, data pure dal Seydewitz, aveva enunciato senza dimostrazione alcuni principali teoremi, quando il Cremona, nel 1858 e nel 1859, con una rappresentazione analitica semplicissima, riguardando la cubica come intersezione di due coni di 2° grado con una generatrice comune, non solo dimostrò i teoremi dello Chasles, ma li compì, mostrandone nuove ed importanti proprietà. Un altro scritto più originale del Cremona, nei primi suoi tempi, è la ricerca delle coniche inscritte in una sviluppabile di 4° ordine e di 3ª classe. Già da questi suoi lavori, trattati col metodo analitico, apparisce tutta la potenza dell'ingegno del matematico, la chiarezza dei pensieri, l'eleganza dello stile, l'accuratezza che serbò sempre nello studio dei problemi che si proponeva. Ma chiamato all'insegnamento della geometria superiore a Bologna, nella sua splendida prolusione, egli deplorava il soverchio esclusivismo del metodo analitico e cercava di rimettere in onore anche tra noi i metodi geometrici, senza nulla togliere all'algoritmo algebrico. Quel discorso fu ammirato da tutti, anche da coloro che, per altre strade s'avviavano alla conquista della verità, inesperti delle dottrine e dei metodi dei matematici.

Sui primi albori del rinnovamento della geometria, non potevano gli italiani prendervi parte essenziale. Già il Monge dapprima e la sua scuola, il Carnot, il Poncelet, lo Chasles, lo Steiner, il Moebius, il Plücker avevano aperto nuove strade alla geometria, nè era facile ad alcuno, nemmeno ad uomini di genio, nelle condizioni degli studî in Italia, di salire subito in alto. Ma il Cremona era da natura disposto sopratutto alle ricerche di geometria pura e a lui spettava di rappresentare degnamente l'Italia nel grande movimento iniziato fra gli stranieri a pro' della geometria moderna. Fin dalla prima sua Memoria sulle cubiche dello spazio si nota nel Cremona lo studio di quanto fecero i geometri francesi, e specialmente lo Chasles, di cui era caldo ammiratore e al quale nel 1860, salendo alla cattedra di Bologna,

chiedeva consiglio: « La mia debolezza (gli scriveva) proviene sopratutto « dalla mia educazione esclusivamente algebrica, e se i miei occhi si sono « aperti al sole della geometria pura, io devo tutta la mia riconoscenza a « Voi: è il vostro Aperçu, è il vostro trattato di geometria superiore che io « benedirò sempre! ». Il Cremona si educò sulle opere dei grandi geometri e nelle sue ricerche cercò di perfezionare dapprima le nuove teoriche e giungere a nuovi risultati; ma fu grande quando assecondò il suo spirito, rendendosi indipendente da quei metodi de' quali si era nella giovinezza fortemente nutrito, e che ad ogni modo gli giovarono alla formazione del suo intelletto di geometra. Tuttavia non abbandonò nella ricerca il metodo analitico, avendo egli stesso dichiarato che anche esponendo le dottrine col metodo geometrico, non di rado aveva adoperato, come correttivo, quello analitico; e al Clebsch, all'elegante e profondo analista e geometra tedesco, col quale ebbe lungo scambio di idee sulle questioni che entrambi trattavano, scriveva nel 1864: « Io sono pienamente convinto circa la mutua assistenza « che l'analisi e la sintesi si prestano nella geometria ». Il Cremona riprendeva lo studio delle cubiche gobbe nel 1861 colla pura geometria, pubblicando una serie di Memorie in giornali italiani e stranieri; e vi scopriva proprietà nuove, specialmente sui piani congiunti, sull'applicazione del teorema del Pascal alla cubica, sulle varie forme della curva secondo il modo suo di comportarsi col piano all'infinito, sul sistema polare, già studiato dallo Schröter, sulle costruzioni della curva in determinate condizioni, sugli iperboloidi di rotazione che passano per essa, ed altre ancora, sì da costituire una vera teorica compiuta intorno ad esse curve. Ma più nuovo fu lo studio fatto nel 1861 della curva del 4° ordine, già incontrata da Salmon e Steiner, chiamata dal Cremona di 2ª specie, denominazione da tutti accolta. Senza presupporre le formole del Cayley e del Salmon, egli dimostra nel modo più semplice e più elegante, le proprietà principali di questa curva, dandone la costruzione lineare. A questa fanno degno riscontro, per l'originalità e per il sano metodo, le ricerche, che sono dello stesso anno, sulle superficie rigate del 3° grado, delle quali erano sconosciute le proprietà. E nel 1862 dava compimento alle sue indagini deducendo il caso della superficie di Cayley, comunicatogli da lui stesso nel giugno 1861. I metodi della geometria proiettiva ordinaria erano già conosciuti per le opere del Poncelet, dello Chasles, dello Steiner e dello Staudt, ma presero per opera del Cremona nuovi aspetti, perchè virtù comune a tutti i suoi lavori è la semplicità del pensiero geometrico, la perfetta eleganza della trattazione, che difficilmente si trovano in altri grandi geometri, perchè egli era davvero fra i geometri un artista.

Altro indirizzo nelle ricerche di lui si cominciò a notare dopo lo studio delle opere dei matematici tedeschi, specialmente dello Steiner. Questi aveva pubblicata la celebre Memoria sopra le curve generali algebriche che con-

dusse il Cremona a intraprendere la dimostrazione delle proprietà soltanto enunciate dal grande geometra svizzero, e a pubblicare nel 1862 il suo bel trattato: *Introduzione ad una teorica delle curve piane.* Quanto fu il lavoro in così breve tempo! Il punto di partenza è la teoria delle polari, secondo una costruzione del Grassmann, deducendo per suo mezzo le proprietà più essenziali delle curve piane. Era questo il metodo meglio adatto a svolgere sistematicamente esse teoriche, dove s'usi del metodo geometrico puro. Oltre ai teoremi dello Steiner, altri molti ne dimostrò trovati da Plücker, Cayley, Hesse, Clebsch e Salmon coll'analisi algebrica, altri ne diede di nuovi, specialmente sui sistemi lineari di curve, completandoli con una Memoria pubblicata negli Annali di matematica nel 1864.

Questo fu il primo trattato fondamentale che acquistò al nostro Cremona fama mondiale, perchè esso fu, ed è ancora, l'unico che esponga le teoriche generali delle curve algebriche piane col metodo sintetico. Nel 1866 questo studio fu seguito dai *Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie*, nei quali si dimostrano pure col metodo sintetico, le più essenziali proposizioni proiettive allora conosciute ed esposte analiticamente da Salmon, Cayley, Chasles, Steiner e Clebsch e molte anche di nuove. Oggi, perfezionato il metodo sintetico, mercè la critica che sorta dai principî fa sentire la sua benefica influenza in tutte le questioni matematiche, si potrebbe desiderare in qualche punto una maggiore precisione. Ma non bisogna dimenticare che il metodo sintetico, come l'analitico, si andò sempre perfezionando gradatamente, e che il Cremona stesso a chi gli aveva chiesto perchè non facesse altre edizioni dei suoi trattati, rispondeva di non volerlo perchè avrebbe dovuto rifarli con troppe aggiunte, e sperava che i giovani avrebbero intrapresa questa grave opera di rifacimento, utile di certo nell' interesse del metodo sintetico stesso.

Come si vede dalla lista delle pubblicazioni del Cremona, egli studiò negli anni della sua vita in Bologna molte altre questioni di geometria, perfezionando sempre, colla sua rara maestria, teorie già conosciute, come ad esempio le belle ricerche sulle superficie sviluppabili del 5° ordine, sulla superficie dello Steiner, sulla superficie di 4° ordine dotata di conica doppia e già studiate da altri, sulla graziosa ipocicloide triscupide di cui lo Steiner aveva date le proprietà principali senza dimostrazione, derivandole dalla teoria generale delle curve di 3ª classe. Già il Cremona, come lo Chasles e lo Steiner, aveva buono il gusto per le proprietà metriche, sicchè in una recensione dei Beiträge della geometria di posizione di Staudt nel 1858 non aveva giudicato con favore l'esclusivismo dell'autore tedesco; d'un uomo che egli più tardi riconobbe come il fondatore della geometria pura. Accanto a questi scritti bisogna ricordare la Memoria sulle superficie del 3° ordine, premiata nel 1866 dalla R. Accademia di Berlino, nella quale svolge sistematicamente e sinteticamente le proprietà fondamentali enunciate senza dimo-

strazione dallo Steiner, usando varî metodi, compresavi la rappresentazione delle superficie in un piano (1).

Su questa superficie moltissimi sono gli scritti, ma le Memorie del Cremona e quella pur premiata dello Sturm, sono le prime che ne trattino sistematicamente. I teoremi appariscono nell'opera dell'italiano casi speciali di una teorica proiettiva della superficie generale d'ordine n. Una interessante applicazione delle proprietà delle 27 rette della superficie del 3° ordine, è quella fatta dal Cremona nel 1877 allo studio dell'esagrammo di Pascal, e può esser orgoglioso chi provocò questa applicazione fatta dal valoroso matematico.

Pregevoli sono questi scritti e per il metodo semplice e per lo stile forbito e pei risultati nuovi, dei quali ebbero ad occuparsi i maggiori geometri del nostro tempo, ma a mio avviso più si riscontra l'impronta del genio che lasciarono nella storia della scienza in quelli iniziati a Bologna dal 1863 sulle trasformazioni razionali delle figure, alle quali per voto unanime dei geometri fu dato il nome del Cremona.

Questa teoria va divisa in due parti: o trasformazioni piane, o trasformazioni nello spazio. Il principio ne è semplice, ma molto fecondo, contenuto già in un altro più generale, e si può dire logico, che è quello di corrispondenza o di relazione, principio fondamentale nella matematica, e che nella geometria aveva già avuto grado a grado varie e precise determinazioni, e che ne ebbe poi altre ancora. Così il Magnus e lo Steiner come il nostro Schiaparelli si erano già occupati delle trasformazioni così dette coniche o di 2° grado, parendo che la più generale trasformazione biuonivoca fosse quella di 2° grado. Ma il Cremona osservò che ripetendo la trasformazione, se ne ottengono superiori al secondo grado. Nessuna teorica può esser detta *proles sine matre creata;* e infatti il concetto di corrispondenza biunivoca razionale fra due curve si trova nelle funzioni abeliane del Riemann, e successivamente fra due piani in un caso particolare, che si chiamò poi trasformazione di De Jonquières, contenuto in una Memoria presentata all'Accademia di Parigi nel 1859, rimasta inedita finchè non uscì la prima Memoria del Cremona, e che il De Jonquières aveva fatta col fine di costruire le curve gobbe di qualunque ordine. Ebbe il Cremona il grande merito di dare al principio delle trasformazioni razionali fra due piani la veste geometrica più generale, ma sopratutto di averne intuita tutta la potenza assegnandone le principali conseguenze.

Le Memorie sulle trasformazioni piane avevano subito richiamata l'attenzione dei geometri, e tosto le studiarono il Cayley, il Clifford, il Rosanes, e il nostro illustre collega Noether. Questi dimostrò che ad ogni

(1) Il Cremona ebbe ancora il premio Steiner nel 1874 per i suoi lavori di geometria pura.

trasformazione piana Cremoniana si può sostituire una serie finita di trasformazioni quadratiche, dimostrazione alla quale diede da poco tempo compimento il Castelnuovo in seguito ad una osservazione del Segre. Frattanto il Cayley nel 1870, allargando i concetti del Cremona allo spazio, si occupava in modo particolare di una trasformazione di 3° ordine, e subito lo seguirono il Noether e il Cremona stesso. Questi, nella prima delle Note del 1871, pose un principio che gli servì anche più tardi per determinare nuovi sistemi di superficie, omaloidici, basi alle trasformazioni, onde deduce nuove superficie rappresentabili sopra un piano e quindi nuovi sistemi omaloidici. Ma la Memoria più compiuta sulle trasformazioni nello spazio è quella pubblicata dal Cremona nel 1872.

Fino dal 1866 con decreti ministeriali era stato il Cremona comandato a Milano, e fermatovi definitivamente nel 1872. Vi trovò nuovo campo alla sua attività scientifica e didattica, accanto al Brioschi e al Casorati. Della rappresentazione piana di una superficie si era già servito fin dal 1864, ma le sue trasformazioni nello spazio gli diedero appunto quel metodo fecondo nel quale studiò le superficie rappresentabili in un piano, che oltre alle superficie già note molte altre nuove ne contengono e sempre interessanti, perchè nell'applicazione del principio, che per questa ricerca è alquanto indiretto, seppe scegliere veramente i casi tipici.

La teoria delle trasformazioni Cremoniane, oltre che per le superficie rappresentabili in un piano, trovò poi una grande applicazione nelle nuove ricerche geometriche specialmente nella geometria delle curve e delle superficie algebriche, e nei sistemi lineari di curve piane: e in queste teorie si sostituì già o si va sostituendo un principio più semplice, cioè quello del proiettare e segare da enti semplici, così detti normali di uno spazio di un numero di dimensioni abbastanza elevato nello spazio generale.

Se il Cremona diede la preferenza al metodo puro e con esso arrivò alle più alte cime nelle ricerche della scienza, conosceva ad un tempo ed applicava egregiamente il metodo analitico, come ne fanno fede i suoi primi ed altri lavori, fra i quali noterò quello sugli integrali a differenziale algebrico, dove presenta sotto forma più geometrica alcune parti della teoria delle funzioni abeliane di Clebsch e Gordan, e sui quali aveva tenuto un corso di lezioni a Milano, mentre ne davano sullo stesso argomento il Brioschi e il Casorati con indirizzi diversi.

Il maestro non fu meno grande dello scienziato, tanto era in lui l'amore alla scienza e tanta l'abilità didattica. Preparava con molta cura le lezioni, che riuscivano ammirabili per la lucidezza e l'eleganza. Egli è il fondatore di una scuola geometrica italiana, che, rafforzata da nuove idee e da nuovi indirizzi, fa sempre più sentire la bellezza del metodo geometrico puro, che in altri paesi, anche dove è nato e cresciuto, va cedendo il passo

all'emulo compagno. Il Cremona non tascurò mai le applicazioni della geometria. Non ne conosco le lezioni di geometria descrittiva date a Bologna nel 1864, ma da quanto mi disse più volte, e dalla domanda che egli faceva a chi dovesse essere assistente di geometria descrittiva e proiettiva nel 1877 nell' Università romana, se sapesse cioè disegnare, devo indurre che di questa dottrina egli serbava il concetto antico del Monge, certo ammodernata e arricchita con nuovi metodi. Egli vedeva una scienza nella quale, come disse il De la Gournerie, la matita ha la sua logica. Il Cremona in una Nota del 1865, alla quale non so perchè è apposto un pseudonimo (anagramma), *Marco Uglieni*, esponeva la soluzione di alcuni problemi grafici della proiezione centrale secondo i metodi usati più tardi dal Fiedler nella geometria descrittiva, della quale fu caldo sostenitore.

Il Cremona si occupò ancora di statica grafica e scrisse un'aurea operetta che s' intitola: *Le figure reciproche della statica grafica*. Queste figure, che si presentano nel problema delle tensioni d' una travatura reticolare semplice piana, tenuta in equilibrio da forze esterne applicate ai nodi e poste in un piano con essa, erano conosciute anche da Maxwell, ma il Cremona ebbe il merito di metter da parte quello che era estraneo alla statica e ideò un organismo elegante e compiuto, da poter facilmente essere ricordato e da dare effettivamente con costruzioni metodiche e non stereometriche la figura che risolve il problema delle tensioni, sia riguardo all' intensità che alla natura degli sforzi cercati. È metodo che, se non serve per tutte le travature, ha molti vantaggi, e l'accolse con entusiasmo il Culmann, il creatore della statica grafica.

Pregevoli sono di lui anche i trattati didattici di geometria proiettiva e di calcolo grafico e la traduzione degli elementi di matematica elementare del Baltzer. Una prova dell' importanza scientifica e didattica de' suoi libri, sono le traduzioni che se ne fecero in più lingue straniere.

Chiamato qui a Roma nel 1873, si occupò con ardore a riordinare, o anzi a fondare la scuola degli ingegneri. Volle dare vitalità a un corpo inerte, quale si era ereditato, e prima sua cura fu l' unirla in un luogo solo colla sezione matematica della Facoltà di scienze. Scopo di questa unione fu quello di accostare gli studî d' ingegneria al focolare della scienza pura, e di conservare quella benefica influenza dell' università scientifica che è necessaria, come egli diceva, onde l' istruzione tecnica non degeneri nell'empirismo, mentre oggidì bisogna pur confessare come il pericolo vada crescendo tra noi, a differenza di altri paesi ove si sente il bisogno di riavvicinare le scienze pure alle scienze applicate anche nelle stesse università, con vantaggio reciproco. E la scuola d'applicazione di Roma per la fama alla quale salì è un altro nobile monumento della grande operosità del Cremona.

Quando trattava dell' esagrammo mistico, che lo aveva richiamato agli antichi amori, parve a un tratto che volesse togliersi dalle altre occu-

pazioni, recandosi a Pisa. Ma il fato vinceva la volontà dell'uomo. Fin dall'infanzia era legato in fraterna amicizia colla famiglia Cairoli, e specialmente con Benedetto, come fu amico di Quintino Sella. Essi credettero loro dovere di ricompensare l'uomo dotto e onesto con un seggio tra i senatori. Ciò avvenne nel 79: e come il fondare una scuola lo aveva già distratto dalla ricerca scientifica, la vita pubblica ne lo distolse del tutto. Ma se egli non potè più contribuire col forte suo ingegno alla teoria delle curve e superficie algebriche, al nuovo svolgersi degli studî intorno ai principî della geometria, tanto diffusi anche tra noi, e se nelle indagini della geometria a più dimensioni, alla quale volse più tardi l'attenzione, vide piuttosto da principio un metodo di ricerca anzichè un'estensione del campo della geometria, una teoria cioè che ha la sua ragione logica nelle leggi del pensiero e nei postulati che servono alla costruzione della stessa geometria comune, tuttavia è noto come egli nelle lezioni si occupasse di argomenti anche recenti, fra i quali la teoria delle trasformazioni di Lie, di cui era grande ammiratore.

Non è qui luogo a parlare dell'opera dell'uomo politico, nè avrei autorità per farlo, ma bisogna ricordare quanto faticasse a vantaggio dell'educazione nazionale. Splendida è la relazione sul disegno di legge intorno alle modificazioni dell'istruzione superiore, citata più volte nella Camera elettiva; e memoranda fu la discussione in Senato nell'81, in cui ebbe parte principale il Cremona relatore; quella sulla legge del Consiglio Superiore di Pubblica Istruzione e sul pareggiamento di alcune Università secondarie, nella quale saviamente sostenne che il pareggiamento avrebbe resa più difficile in avvenire ogni legge salutare sulla Università. Fu spesso relatore di leggi e di bilanci, fece parte di Commissioni parlamentari e in nome di Ministri giudicò gli atti di pubbliche amministrazioni. Molta parte ebbe nel fare regolamenti e nel diffondere i buoni metodi nell'insegnamento secondario. Di tanta stima era circondato nel Senato, che questo toglieva la seduta in segno di lutto per la morte di lui, raro onore che si accorda a senatori defunti; e il Governo provvedeva ai funerali a spese dello Stato.

Forse dagli stranieri si osserva che i nostri scienziati più di frequente che altrove partecipino alla vita politica, tanto da distorli dalla scienza, che, indiscreta amante, vuole tutti gli amplessi per sè. Ma il fatto è più spiegabile, perchè l'Italia non ha ancora raggiunto nei pubblici ordinamenti un'assetto definitivo che corrisponda alle sue tradizioni e ai suoi bisogni, come, in altri tempi non lontani, non potevano, non dovevano gli uomini di ingegno e di dottrina, star in disparte dal movimento nazionale per l'indipendenza della patria, condizione essenziale anche al progresso della scienza.

Nè solo si diede alla scienza il Cremona, ma sentì sempre caldo amore agli studî letterarî, ed ebbe cultura varia ed estesa. Esperto del francese, del tedesco e dell'inglese n'ebbe grande aiuto per le sue ricerche e per la cor-

rispondenza coi maggiori matematici d'Europa. Fu socio di moltissime Accademie, certo delle prime Accademie del mondo; fu dottore *honoris causa* di Dublino, di Edimburgo e di Christiania, fu cavaliere dell'ordine civile di Savoia e, nel maggio scorso, da un inviato speciale di S. M. l'imperatore di Germania, riceveva l'ordine *Pour le mérite*, onore comune a tre soli o quattro in Italia. Fu più volte capo del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione che guidava con senno, con prudenza, con cortesia. Come vice-presidente del Senato ebbe a dirigerne le discussioni, ammalato il Farini, e rappresentò degnamente i colleghi nella solenne commemorazione cinquantennaria del 1848 in Campidoglio.

Ma non ha il ritratto compiuto del Cremona chi non lo consideri nelle sue intime qualità. Nessuno forse superò, nessuno forse saprà eguagliare l'ardore e la perseveranza indomabile di lui negli studî. Per molti anni a Bologna si alzò alla mezzanotte, dopo un brevissimo sonno, per attendere assiduamente a ricerche di scienza fino al sorgere del mattino, dopo di che ristoravasi dormendo ancora qualche poco; ed avendogli il lavoro soverchio date forti emicranie, egli a correggere i danni dei trascurati esercizî in gioventù, volle già maturo esser nuotatore, alpinista, giuocatore di bigliardo, ciclista, e raggiunse il suo fine. Volle, fortemente volle. Severo con gli altri, era severissimo con sè stesso; e se come ispettore o come giudice potè parere troppo rigido, a nessuno parve mai ingiusto. Sopra le ombre degli uomini vedeva aleggiare una fiera e incorrotta signora: la scienza. Anche i colleghi e i discepoli lo ebbero amico sincero e avvocato possente, se lo voleva la giustizia: così che si rammenta a Bologna come a un onorato professore di quell'Università, male accolto dagli scolari, egli fu amorevole fratello: e, riuniti parecchi degli insegnanti, fattisi uditori, si mutarono in applausi le voci degli indisciplinati. Metteva in queste opere di onestà tutto il nobile suo cuore: lo metteva in atti pietosi, e un giorno, per salvare un bambino che stava per cadergli sotto le ruote, si gettò dal biciclo e restò gravemente ferito.

L'occhio freddo nelle ore dei suoi uffici si faceva a un tratto pieno di dolcezza nell' intimità. Alla bontà dell'animo accoppiava grande fermezza, da vincere quasi sempre gli ostacoli opposti al raggiungimento di fini degni di lui. Aveva la religione del dovere, sentita fortemente da una onesta e bene educata coscienza. Non volle far parte di amministrazioni private, per le quali pel suo ingegno e la sua integrità era sollecitato: preferì morire senza ricchezze, piuttosto che perdere la libertà, cedendo a lusinghe di lauti guadagni; quasi povero morì, non lasciando altro che i frutti dei modesti risparmî fatti da professore. E in questi tempi, scarsi di forti caratteri, il Cremona che pure poteva ambire l'onore di essere detto ministro per impiegare

l'alto intelletto a beneficio della nazione, a Quintino Sella incaricato di succedere a Benedetto Cairoli nel 1881, e che gli aveva offerto il portafoglio della Pubblica Istruzione, Cremona così scriveva:

« Roma, 19/5 81.

« *Carissimo Amico*,

« Tu mi facesti un'offerta, che mi resterà come uno dei più preziosi « ricordi della mia vita. L'essere da te stimato capace di venirti in aiuto « nella difficile impresa a cui ti sei sobbarcato è per me altamente onore- « vole e lusinghiero.

« Ma potrei io darti un aiuto efficace? aggiungerei io forza al tuo Mi- « nistero? Non lo credo. Ad ogni modo le mie opinioni e i miei precedenti « politici mi vietano di pormi contro i caduti, associandomi ai successori.

« Perdona illustre amico, se ti mando per iscritto una risposta diversa « da quella che tu, per tua benevolenza mostrasti desiderare, che io ti por- « tassi a voce. Se ricuso l'alto onore non è per cagion tua, ma della situa- « zione, la quale m'impone dei doveri che tu certamente vorrai apprezzare, « pur non approvandoli.

« Confido che mi resterà intera la tua amicizia, come io sarò sempre

Tutto tuo L. Cremona ».

Più tardi lo vediamo sull'alto seggio; ma i casi vollero che poco durasse, nè si potè giudicarne l'opera, che poteva essere salutare agli studî.

Nella sua grandezza, era di una modestia esemplare: mai parlava dei suoi meriti, e si dava cura sempre di mettere in luce, negli scritti e nella corrispondenza privata, i pregi dei matematici italiani dimenticati, dando così bell'esempio ai giovani, di giusta dignità nazionale.

Fu ottimo padre di famiglia e della sua prima moglie Elisa Ferrari, della quale si innamorò senza conoscerla fino dal 1848, per le lettere patriottiche da lei scritte al fratello, suo compagno d'armi, egli scriveva ad un valoroso discepolo, al Bertini, quando la morte gliela rapì: « A lei io « devo infinitamente di più che d'ordinario un marito deve alla moglie, giacchè « io le debbo i miei studî dal 1856 in poi, e per conseguenza la mia car- « riera, qualunque essa sia stata, in quanto che ella, prendendo su di sè tutte « quante le cure della casa e dell'educazione dei figli, mi procurò quella « quiete e serenità d'animo, senza della quale gli studî sono impossibili o « o assai malagevoli ». Ed invero l'educazione data ai figli Vittorio, Elena ed Itala, care conoscenze della mia giovinezza, fu esemplare.

Gli ultimi anni della vita dell' illustre nostro Socio furono rattristati da dolori che sopportò con fortezza d'animo senza che mai dal suo labbro uscisse parola di lamento. Aveva imparato a soffrire senza lagnarsi fin dalla giovinezza; si rivedeva, nel vecchio uomo, il prode soldato.

Ma appunto durante queste sofferenze mute l'anima sua si atteggiò a nuove forme di sentire più squisite e più perfette. Sentiva prossima la fine: lo sapeva la sua diletta Anna, sposata in seconde nozze nel 1888, che egli adorava e dalla quale era adorato e fu, infino alle ultime ore, assistito amorosamente. Per non rattristarsi, tentavano nascondersi che la gelida mano della morte stava per chiudere quella virtuosa e operosa esistenza.

Dal 10 giugno egli non è più, ed il suo spirito si libra intorno a noi, lieto che ne custodiamo la sacra memoria. Nelle sue opere durano i testimoni fedeli, e quando la patria avrà nelle scienze ripreso il suo antico e glorioso cammino, Cremona apparirà ancor più grande, e gli intelletti ed i cuori si volgeranno con rispetto e con riconoscenza ad una delle più belle figure dell'Italia risorta.

LISTA DELLE PUBBLICAZIONI

DI

L. Cremona

—

1. Sulle tangenti sferoconiugate. (Ann. mat. 1855).
2. Intorno ad un teorema di Abel. (Ibid. 1856).
3. Nota intorno ad alcuni teoremi di geom. segmentaria. (Progr. del Ginnasio liceale di Cremona 1857).
4. Sulle linee del 3° ordine a doppia curvatura. (Ann. mat. 1858, 1859).
5. Intorno alle superficie di 2ª classe inscritte in una stessa superficie sviluppabile di 4ª classe. (Ibid. 1859).
6. Le coniche inscritte in una stessa superficie sviluppabile di 4° ordine e 3ª classe. (Ibid. 1859).
7. Soluzioni di varie questioni. (Nouv. Ann. 1855-60).
8. Intorno ad un'operetta di Giovanni Ceva, matematico milanese del secolo XVII. Milano 1860.
9. Considerazioni di storia della Geometria in occasione di un libro di geometria elementare. Bologna 1860.
10. Sur les coniques sphèriques etc. (Nouv. Ann. 1860).
11. Sopra un problema generale di geometria. (Ann. mat. 1860).
12. Sulle superficie omofocali. Nota bibl. (Ibid. 1860).
13. Prolusione ad un corso di geometria superiore all' Università di Bologna. Politecnico 1860.
14. Sulle superficie gobbe del 3° ordine. (Atti Ist. Lomb. 1861).
15. Intorno alla curva gobba del 4° ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado. (Rend. e Mem. Acc. Bologna 1861).

16. Sur les lignes gauches du 3e ordre et classe. (J. f. math. 1861).
17. Sur les cubiques gauches. (Ibid.).
18. Trasformazione geometrica di una figura piana in un'altra pure piana. (Rend. Acc. Bologna 1861-62).
19. Sulla teoria generale delle curve piane. (Ibid. 1861-62).
20. Un problème d'homographie. (Nouv. Ann. 1861).
21. Sur les surfaces gauches du 3e ordre. (J. f. math. 1862).
22. Mém. de géom. pure sur les cubiques gauches. (Nouv. Ann. 1862).
23. Introduzione ad una teoria delle curve piane. (Mem. Acc. Bologna 1862). Traduzione tedesca di Curtze, secondo una nuova redazione dell'A. Greiwsfald 1865.
24. Sur la surface développable du 5e ordre. (C. R. 1862).
25. Sulla proiezione iperboloidica di una cubica gobba. (Ann. mat. 1863).
26. Sulla teoria delle coniche. (Ibid. 1863).
27. Nuove ricerche di geometria pura nelle cubiche gobbe ed in ispecie nella parabola gobba. (Ibid. 1863).
28. Les hyperboloides de rotation qui passent par une cubique gauche. (J. f. math. 1863).
29. Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. (Mem. Acc., Bologna, Nota I, 1863; Nota II, 1864).
30. Teoremi sulle cubiche gobbe. (Giorn. di Napoli 1863).
31. Area di un segmento di sezione conica. (Ibid. 1863).
32. Sulla teoria delle coniche. (Ibid. 1864).
33. Considerazioni sulle curve piane del 3° ordine. (Ibid. 1864).
34. Sopra alcune questioni sulla teoria delle curve piane. (Ann. mat. 1864).
35. Œuvres de Desargues. Nota bibl. (Ibid. 1864).
36. Sulla teoria delle coniche. (Ibid. 1864).
37. Sur la surface du 4e ordre qui a la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents. (J. f. math. 1864).
38. Nombre de coniques qui satisfont à des conditions doubles (C. R. 1864).
39. Prospettiva secondo Taylor, sotto il pseudonimo di Marco Uglieni. Bologna 1864.
40 Hypocicloide à trois rebroussements. (J. f. math. 1865).
41. Dém. géom. de deux théorèmes sur la surface d'égale pente circonscrite à une conique. (Nouv. Ann. 1865).
42. Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie. (Mem. Acc., Bologna 1866). Traduzione tedesca di Curtze, Berlino 1870, completata con la Mem. sulle superficie del 3° ordine.
43. The 14 points conic. (Messenger of math. 1866).
44. Normaly to conics. (Ibid. 1866).
45. Rappresentazione della superficie di Steiner e della superficie gobba di 3° grado sopra un piano. (Ist. Lomb. 1867).
46. Un teorema intorno alle forme quadratiche non omogenee. (Ist. Lomb. 1867).
47. Mém. de géom. pure sur les surfaces du 3e ordre. (J. f. math. 1868), presentata al concorso del premio Steiner all'Accademia delle scienze di Berlino nel 1866.
48. Sulle superficie gobbe di 4° grado. (Mem. Acc. Bologna 1868).
49. Sulla rappresentazione di una classe di superficie gobbe sopra un piano e determinazione delle curve assintotiche. (Ann. mat. 1868).
50. Famiglia di superficie gobbe. (Ist. Lomb. 1868).
51. Curve gobbe di 4° ordine. (Ibid. 1868).
52. Sulla trasformazione delle curve iperellittiche. (Ibid. 1869).
53. Intorno al numero dei moduli delle equazioni o delle curve algebriche di un dato genere. (Ibid. 1869).

54. Sugli integrali a differenziale algebrico. (Mem. Acc. Bologna 1869)
55. Sulle ventisette rette di una superficie del 3° ordine. (Ist. Lomb. 1870).
56. Sulla superficie del 4° ordine dotata di una conica doppia. (Ibid. 1871).
57. Sulle trasformazioni razionali nello spazio. (Ibid. 1871).
58. Ueber die Abbildung algebraischer Flächen. (Gött. Nach. 1871, et Math. Ann. 1871).
59. Sulla rappresentazione piana di alcune superficie algebriche dotate di curve cuspidali. (Mem. Acc. Bologna 1872).
60. Trasformazioni razionali nello spazio. (Ann. mat. 1872).
61. Rendiconto dei lavori della classe di scienze matematiche e naturali del R. Istituto Lombardo, 1872.
62. Cenno necrologico di L. Clebsch. (Ist. Lomb. 1872).
63. Elementi di Geometria proiettiva. Roma 1873.
64. À propos de la Note de Brioschi: Tangentes doubles à une courbe de 4e ordre (Math. Ann. 1874).
65. Elementi di calcolo grafico. Torino 1874.
66. Sulla corrispondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie. (Atti Accad. Lincei 1875).
67. Intorno alla Memoria di Conti « Resistenza d'attrito ». (Ibid. 1875).
68. Système de sphères et de droites. (Brit. Ass. Rep. 1876),
69. Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dal'esagrammo di Pascal. (Atti Acc. Lincei 1877).
70. Polarexaeder bei den Fl. 3er Ordnung. (Math. Ann. 1878).
71. Le superficie e le curve che passano pei vertici di infiniti poliedri formati dai piani osculatori di una cubica gobba. (Ist. Lomb. 1879).
72. Commemorazione di D. Chelini. (Rend. Acc. Lincei 1879).
73. Le figure reciproche della statua grafica, 3ª ediz., Milano 1879.
74. Sopra una certa superficie del 4° ordine. (Estr. dal vol. pubblicato in memoria di D. Chelini a Milano 1881).
75. Tavole log. trigon. di Bremiker, traduzione. Milano 1872.
76. Cenno necrologico di Spoottiswode. (Rend. Acc. Lincei 1883).
77. Cenno necrologico di H. S. Stephen Smith. (Ibid.)
78. Sopra una trasformazione birazionale del 6° grado dello spazio a tre dimensioni, la cui inversa è del 5° grado. (Proceedings of the London math. Society 1884).
79. On exemple of the method of deducing a surface from a plane figure. (Trans. of the roy. Society of Edimburg 1884).
80. On a geometrical transformation of the fourth order in space of three dimensions, the inverse transformation being of the sixth order. (Trans. of the roy. Irish ak. 1884).

A queste pubblicazioni vanno aggiunte le relazioni e i discorsi pubblicati negli Atti del Senato del Regno d'Italia dal 1880 al 1903, e le pubblicazioni d'occasione fatte dal Cremona quale membro di Commissioni ministeriali o reali.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Dalla Vedova presenta il *Catalogo metodico della Biblioteca Sociale della Società Geografica (1868-1901)*. Parte 1ª: *Libri e periodici*, e ne dà notizia.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 dicembre 1903.

Amodeo F. — Elementi di Algebra. Parte prima del volume secondo degli Elementi di matematica. Napoli, 1903. 16°.

Bilancioni G. — La psicologia cellulare. Saggio di critica positiva. Rimini, 1903. 16°.

Cattolica P. L. — Trattato di Idrografia. Parte terza. Nozioni di astronomia geodetica. Genova, 1904. 8°.

De Angelis d'Ossat G. — Filippo Keller (Bollettino del Naturalista) Roma, 1903. 8°.

Fennaman. N. M. — Lakes of Southeastern Wisconsin (Wiscorin Geological and Natural History Survey. Bulletin N. VIII). Madison. Wis. 1902.

Flores E. — L'Elephas primigenius Blum. nell'Italia meridionale continentale. Roma, 1903. 8°.

Id. — Luigi Bombicci. Bologna, 1903. 8°.

Lapparent (A. de). — La science et le paysage (Inst. de France). Paris, 1903. 4°.

Lebon E. — Les travaux mathématiques au Congres de Sciences historiques à Rome en 1903 (*L'enseignement mathématique*, V^e^ année n. 5). Paris, 1903. 8°.

Lönberg L. — Sveriges Karta tiden till Omkring 1850. Upsala, s. a. 8°.

Luigioni P. — Una varietà nuova del Carabus italicus Dejs. Firenze, 1903. 8°.

Id. — Note ed osservazioni sull'Anthypna Carceli Laporte (romana Duponchel). Roma, 1902. 8°.

Lundborg H. — Die progressive Myoklonus-Epilepsie (Unverricht's Myoklonie). Upsala, 1903. 8°.

Meli R. — Di una lapide esistente in Bagnorea nella quale si fa parola del terremoto ivi avvenuto nell'anno 1695. Comunicazione preliminare. Roma, 1903. 8°.

Id. — Programma del corso di geologia applicata svolto nella R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Roma. Genova, 1903. 8°.

Meschinelli L. — Un nuovo Chirottero fossile (Archaeopteropus transiens Mesch.) delle ligniti di Monteviale (Contr. alla Paleontologia Vicentina). Venezia, 1903. 8°.

Résultats des campagnes scientifiques accomplies sur son Yacht par Albert I^er^. Prince Souverain de Monaco. Fascicules XXIII et XXIV. Monaco, 1903. 4°.

Righi A. — Sulle cariche elettriche generate dai raggi X sui metalli nel vuoto. Bologna, 1903. 4°.

Id. — Ueber die Jonisierung der Luft durch eine elektrisierte Spitze (Physik. Zeitschrift, Jahrg. IV).

Scuola di Geografia. Anno scolastico 1902-1903 (R. Istituto di studî superiori pratici e di perfezionamento in Firenze). Firenze, 1903. 8°.

V. C.